EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

mei
2003/nr.7
jaargang 78

# INTERVIEWS
# COMPUTERS IN DE KLAS
# LEERLINGEN VOOR DE KLAS



orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren




Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394



Artikelen/mededelingen

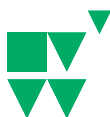
Artikelen en mededelingen naar:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen:

- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette of per e-mail: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl



Voorzitter
Marian Kollenveld
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
Wim Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
Elly van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
foto omslag Peter Tahl, Groningen
produktie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie verenigingsjaar 2002-2003

Leden: € 40,00
Gepensioneerden: € 25,00
Studentleden: € 20,00
Leden van de VVWL: € 25,00
Lidmaatschap zonder Euclides: € 25,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgend nummer.
Voor personen: € 45,00 per jaar
Voor instituten en scholen: € 120,00 per jaar
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Opzeggingen vóór 1 juli.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor € 15,00.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Leen Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordrecht, tel. 078-639 08 90
fax 078-6390891
e-mail: lbozuwa@hetnet.nl
of Freek Mahieu, Dommeldal 12
5282 WC Boxtel, tel. 0411-67 34 68

7

mei 2003 JAARGANG 78

INHOUD



Aan dit nummer werkten verder mee:
Peter Boelens, Chris vander heijden, Klaas-Jan Wieringa en Sam de Zoete.

# Van de redactietafel

[ Marja Bos ]

## Basisvorming

In oktober 2002 werd de Taakgroep Vernieuwing Basisvorming ingesteld om het ministerie te adviseren over nieuwe inhouden voor de eerste leerjaren van het voortgezet onderwijs. Tot nu toe zijn vooral schoolleiders betrokken geweest bij het overleg, maar ook docenten zouden kritisch moeten meedenken en hun stem laten horen.
Zie voor nadere informatie: www.vernieuwingbasisvorming.nl

## Kunst

Ook voor volgend cursusjaar staat er weer een themanummer op stapel. Dit keer is het de bedoeling in januari 2004 een special uit te brengen over ‘wiskunde/wiskundeonderwijs en kunst’.
De redactie heeft inmiddels al diverse personen benaderd om een bijdrage te leveren, maar suggesties en eigen bijdragen van lezers blijven uiteraard welkom. Als u een aardig idee heeft, neemt u dan in verband met de planning en de spreiding van onderwerpen op korte termijn contact met ons op (redactie-euclides@nvvw.nl). Conceptbijdragen voor het themanummer kunnen overigens tot 1 september a.s. ingediend worden.

## Dit nummer

De inzet van computers in het wiskundeonderwijs is inmiddels niets bijzonders meer – gelukkig raken de meeste scholen steeds beter geoutilleerd, en loopt de organisatie eromheen steeds gesmeerder. Door alle aanvankelijke technische en ‘facilitaire’ problemen was en is er niet altijd zoveel aandacht voor de didactische aspecten rond de inzet van ICT ten behoeve van het leren door de leerling. Die didactiek komt in dit nummer van Euclides in twee artikelen aan de orde: één over de mogelijkheden in de onderbouw die laptops kunnen bieden (zie blz. 317), en één over het belang van klassikale interactie binnen wiskundeonderwijs dat sterk leunt op het gebruik van ICT (zie blz. 314).
Het lerarentekort heeft veel schaduwkanten, maar soms worden uit nood creatieve oplossingen geboren met een meerwaarde voor de betrokken leerlingen. Paul Ket rapporteert.
Irene Dalm laat zien hoe ook leerlingen in het vmbo uitstekend in staat zijn tot het uitvoeren van een Praktische Opdracht – als je er maar niet mee wacht tot klas 3 of 4, en ze er dan in één toetsmoment op afrekent... Er is een aanloop nodig, op z’n minst vanaf de brugklas. Vaardigheden worden immers geleidelijk verworven!
Dit nummer van Euclides telt twee interviews. Het interview met Barbara van Amerom laat zien hoe een baan als leraar gecombineerd kan worden met onderzoekswerkzaamheden. In het andere interview vertelt Lia van Asselt hoe zij een rol speelt in de verbetering van de aansluiting tussen het vwo en de Universiteit Twente.

Vanwege verdrietige omstandigheden vindt u dit keer geen aflevering van de rubriek ‘t Denken Bevorderen van Anne van Streun. Enkele weken geleden is zijn vrouw Klaasje namelijk zeer plotseling overleden. De redactie wenst Anne veel sterkte bij de verwerking van dit grote verlies.

Draaiboek A-uur 12/2

2N Pythagoras in de ruimte + Nakijken.

2O P. in de ruimte oefenen

2M Lopen achter. P. nog een keer neerzetten.

2P Klas werkt zelf door.

//

* $A^2 + B^2 = C^2$ wordt niet gedaan!!
* De tabel hoort ook in het schrift

| | | |
|---|---|---|
| RH2 | 3 | 9 |
| RH2 | 4 | 16 + |
| L2 | | 25 |

* VMBO-B doet geen P. in de ruimte.

Succes! Paul

# LESGEVEN SAMEN MET LEERLINGEN

**Leerlingen die voor de klas staan, niet één keer, maar geroosterd, als vaste docenten op een vaste klas. Onderdeel van hun PTA voor wiskunde en als middel om een tekort aan docenten op te vangen. Een terugblik op een experiment. Hoe is het gegaan en wat heeft het opgeleverd - een verhaal over docenten, gastdocenten, leerlingen en vwo-ers.**

**[ Paul Ket ]**

### Woensdagochtend 1e uur

Op afdeling C1 komen de tweede klassen binnen. Op de afdelingsruimte zijn de vijf lokalen beschikbaar, iedereen die er is komt voor wiskunde. De wiskundedocent van drie van de vier klassen, Eric, loopt tegelijk met vier vwo-5 leerlingen binnen[1]. De lokalen worden opengemaakt en iedereen gaat naar de eigen plek. Na de start van de les loopt Eric de lokalen langs. Eric heeft dit lesuur, net zoals alle weken, de regie. Eén A4-tje geeft de inhoud van het lesuur weer. Op het programma staat een sommendictee, wat uitleg op het bord en zelfstandig werken. Naar eigen inzicht op volgorde te zetten.
Bert en Rienk uit vwo-5 hebben klas 2N. Na wat gerommel beginnen ze met het sommendictee: Bert leest de opgaven op, de leerlingen maken de sommen over machten en de volgorde van bewerkingen. Na afloop kijken de leerlingen het werk samen na. Bert en Rienk leggen de opgaven uit waar de leerlingen samen niet uitkomen. Uiteindelijk staan de antwoorden allemaal op het bord. Na het klassikale gedeelte gaat Rienk de nakijkboeken halen, Bert loopt rond en legt uit zodra hem wat gevraagd wordt.
Ook in de drie andere lokalen gaat het lesuur zo. Bij klas 2Q is Philip, gastdocent van een andere afdeling, bezig om kwadraten en machten te bespreken. Liesbeth en Petra, eveneens leerlingen uit vwo-5, hebben besloten het sommendictee aan het einde van de les te doen. Zij zitten ieder bij een tafelgroepje leerlingen uitleg te geven terwijl de rest zelf doorwerkt.
Halverwege het lesuur loopt Eric nogmaals de lokalen langs om te zien of er problemen zijn. Zijn klas, 2W, kan best zonder hem doorwerken.
Na 70 minuten gaat de bel en begint de kleine pauze. De docenten en de vwo-5 leerlingen zoeken elkaar op in de afdelingsruimte. Hoe is het gegaan? Waren er problemen met leerlingen? Wat was er moeilijk aan de wiskunde? Na een paar minuten gaat iedereen pauze houden.

### Donderdag, daltonuur

Tijdens het daltonuur komt een groep van 20 leerlingen naar lokaal A108. Het zijn de leerlingen uit vwo-4 en vwo-5 die wiskunde geven aan de 1e en 2e klassen. Dit begeleidingsuur wordt geleid door wiskundedocent René die al deze leerlingen les geeft en door collega Eric, die de Afdelingsuren vanuit de onderbouw regelt.
Het uur begint met de constatering dat de havo-leerlingen afgehaakt zijn en geen les meer geven in hun Afdelingsuur. Daarna een rondje vragen en opmerkingen. De leerlingen komen met lesgeefvragen: wat met leerlingen die te laat zijn? Hoe ga je om met een leerling die boos weggelopen is? René en Eric bespreken de vragen door vergelijkingen te trekken met wat de vwo-5 leerlingen kennen uit hun eigen lessen. Het gaat over omgaan met leerlingen, hoe ze zelf aangesproken willen worden, hoe zij de onderbouwleerlingen willen aanspreken. Kortom, hoe ze als leerling docent zijn. Hierna volgt een overzicht van de lesstof van de 1e en 2e klassen. Waar de klassen ongeveer moeten zijn, waar bij de uitleg op gelet moet worden en waar de veelgemaakte fouten zitten.
Na een half uurtje wordt de bijeenkomst beëindigd. Degenen die de eerste klas begeleiden blijven plakken. Ze zijn voor het eerst geconfronteerd met het verhaal van de heks over de negatieve getallen. Véél vakdidactiek gaat goed bij deze leerlingen die niet anders gewend zijn dan Moderne wiskunde, maar dit verhaal was toch iets te ver weggezakt. Eric en René leggen het verhaal in grote stappen nog een keer uit. Voor sommige vwo-leerlingen een feest van herkenning. Tussen neus en lippen door wordt nog even duidelijk gemaakt dat ezelsbruggetjes als 'min en min is plus' niet gebruikt mogen worden, de eersteklassers moeten die zelf ontdekken. Anders wordt wiskunde het leren van trucjes. De bovenbouwers die al langer meedraaien, knikken begrijpend; het hoofdstuk over grafieken die alleen maar stijgen/dalen/ gelijkblijven had dezelfde vakdidactische achtergrond.

### Goed voor de school

Oktober 2001. De schoolleiding zit om de tafel met de onderbouwsectie wiskunde, nu uitgedund tot 8 mensen. Het probleem is het aantal vacatures in de onderbouw. Acht weken na de start van het schooljaar zijn er nog steeds klassen die geen wiskunde hebben. Maar de helft van de 26 eerste en 26 tweede klassen heeft gewoon wiskunde. De flexibiliteit bij collega's van andere vakken om deze uren op te vangen raakt op, daarnaast slaan zij vakdidactisch nog wel eens de plank mis. Urenuitbreiding bij de wiskundedocenten is niet mogelijk: op de mensen die er zijn, moet je zuinig zijn. Er wordt gepraat, maar er is geen oplossing. De bijeenkomst wordt beëindigd met de opdracht het ondenkbare te verzinnen, zolang het maar bijdraagt aan de oplossing van het probleem.
Half november worden de 'Afdelingsuren' ingesteld, op dat moment meer naam dan inhoud. Eerste doel: zorgen dat alle klassen weer les krijgen. Middel: inzetten van bovenbouwleerlingen in de onderbouw. Ter voorbereiding wordt één docent een week geheel vrijgeroosterd om het plan uit te werken. Het rooster wordt aangepast en op 6 december beginnen de Afdelingsuren.
Door alle klassen één in plaats van twee lesuren te geven, kunnen er uren over naar klassen die nog geen docent hadden. Maar slechts één uur wiskunde in de week is te weinig. De Afdelingsuren zijn er om dit op te vangen. Tijdens het tweede trimester is het een experiment. Gaat dat goed, dan zal het in het derde trimester voortgezet worden.

### Goed voor de klassen

Klas 2P heeft normaal gesproken les van collega Karel. Karel is veel afwezig. Vervelend, maar nu er te weinig collega's zijn, vallen de uren uit. In de tweede klassen leidt dit al tot onrust: de resultaten zijn slecht, het gebrek aan lessen eist zijn tol. De Afdelingsuren betekenen dat ze nog maar één lesuur van Karel hebben, ze krijgen er een lesuur met twee vwo-5 leerlingen voor terug. En dat Afdelingsuur gaat altijd

door! Omdat er tegelijkertijd nog drie andere 2e klassen wiskunde hebben, zijn er meerdere docenten en gaat het uur altijd door. Ook lopen er zoveel mensen rond die kunnen uitleggen dat ze nu lekker op kunnen schieten. Vooral de meiden uit 2P vinden het fantastisch: les te krijgen van die mooie jongen uit vwo-5. Wiskunde wordt weer spannend...
Docent Philip heeft dat uur de regie en vangt de afwezigheid van Karel op. Zo blijft klas 2P toch bij. Het vraagt wel veel van de klas: ze moeten zelf zorgen bij te blijven, en omdat de vwo-leerlingen niet veel voor het bord doen, moeten de leerlingen echt om uitleg vragen, anders denken ze dat ze het snappen, terwijl dat toch niet zo blijkt te zijn. Soms gaat het niet goed: leerlingen zonder zelfdiscipline doen in het Afdelingsuur te weinig en krijgen op het proefwerk de rekening gepresenteerd.
Leerlingen vinden het wel grappig dat ze les hebben van zoveel verschillende mensen. Ook de rector die een keer komt kijken, wordt voor wiskundedocent aangezien en krijgt de vraag om een som uit te leggen. Hij moet in de vwo-ers zijn meerderen erkennen.

## Goed voor de vwo-leerlingen

November 2001. Liesbeth en Alfina zitten in vwo-5 en hebben wiskunde van René. Ze volgen het N&T-profiel en staan er goed voor. Aan het einde van het eerste trimester komt René vragen of ze de educatieve opdracht uit hun PTA voor wiskunde al gedaan hebben, en of ze er voor voelen om samen les te gaan geven aan een tweede klas. Telt mee voor het PTA en als project. Dan hebben ze in de projectweek, die ook herkansingsweek is, meer tijd voor andere dingen. En of hij morgen antwoord kan krijgen.
Natuurlijk vinden de meiden de eerste keer lesgeven erg spannend. Met een fotogalerij en een namenlijst van wat ‘hun klas’ gaat worden, zijn ze de eerste les ruim voor tijd aanwezig. Van wiskundedocent Eric krijgen ze een ‘spoorboekje’ voor het uur. Eric stelt ze voor aan de klas, spreekt nog wat mooie woorden en vertrekt. Van het spoorboekje komt niets terecht. Ze besteden de les aan kennismaken, rondlopen en vragen beantwoorden. Gelukkig zijn er dingen als absenten controleren en opschrijven waar leerlingen zijn met hun werk; die klusjes breken het ijs.
Vier weken later zijn Liesbeth en Alfina maar net op tijd. Geroutineerd pakken ze het spoorboekje aan en zorgen er voor dat de leerlingen hun spullen voor zich nemen. De les naar hun hand zetten gaat prima. Vandaag is het wel spannend, want hun eigen wiskundedocent René komt kijken hoe het gaat, ze krijgen er immers een cijfer voor het PTA voor. Gelukkig gaat de uitleg over de bordjesmethode prima. Ook René is onder de indruk. Het enige dat misging was, dat Liesbeth haar boeken niet bij zich had en voor de uitleg dus moest spieken in het boek van de leerling. Een beter teken van zelfvertrouwen is niet denkbaar. Bij het napraten vertelt Alfina dat het haar, nu ze opnieuw het boek voor klas 2 doorneemt, nu eindelijk duidelijk is waar het toen allemaal goed voor was. Een inzicht waar ze erg veel plezier aan heeft. Komt ze er niet meer uit, dan grijpt ze terug naar de oplosmethodes uit het boek voor klas 2.

## Goed voor docenten

Collega Philip weet nog niet wat hij moet denken van de Afdelingsuren. Normaal alleen verantwoordelijk voor wat er in het eigen lokaal met de eigen klas gebeurt, tijdens de afdelingsuren is hij of ‘gastdocent’ of manager van vier of vijf klassen tegelijkertijd.
Als gastdocent geeft hij de klas van een collega alleen in het afdelingsuur les. Dan moet hij een les geven zoals hem gevraagd wordt en dat is niet altijd makkelijk. De collega pakt zaken toch anders aan dan Philip zou doen. Het scheelt wel voorbereiden en nakijken, maar het heeft ook iets vluchtigs. Vooral omdat hij na vier lessen de namen nog niet in zijn hoofd heeft.

**Helen Parkhurst**
SG Helen Parkhurst is een grote school in Almere. De tweejarige brugklas telt per leerjaar 26 klassen. In de klas leerlingen van alle niveaus: van BBL tot VWO. De school is georganiseerd in 8 afdelingen met in de onderbouw vier 1e en vier 2e klassen. Elke afdeling heeft twee docenten wiskunde.

**Wiskunde in Daltonvorm**
Lesuren op Helen Parkhurst duren 70 minuten. Richtlijn is dat daarvan ongeveer 20 minuten besteed worden aan uitleg door de docent. De rest van het uur werken leerlingen - aan de hand van een leerstoflijn met daarin leerdoelen en opgaven - zelfstandig of samen met klasgenoten aan de stof.

**Afdelingsuren**
Een afdelingsuur is een uur waarop vier klassen tegelijkertijd wiskunde hebben. Minimaal zijn er twee docenten aanwezig waaronder één wiskundedocent. Leerlingen geven les in duo's of individueel in het bijzijn van een docent van een ander vak, vwo-5 leerlingen aan 2e klassen, vwo-4 leerlingen aan 1e klassen. De vwo-leerlingen hebben altijd dezelfde klas, zodat ze de klas kunnen leren kennen. Docenten worden flexibeler ingezet. Per afdelingsuur is er één docent die de regie voert. Schoolbreed is er één docent die de afdelingsuren regelt.

**Inzet van leerlingen: leren!**
Centraal staat dat de leerlingen die lesgeven, leren. Ze leren wiskunde, leren lesgeven en leren omgaan met kinderen. Daar worden ze op beoordeeld: ze krijgen er een cijfer voor. Het gaat er hierbij vooral om, of ze groei doormaken: de laatste les moet beter gaan dan de eerste.

Als regisseur moet zijn voorbereiding op papier komen en wel zo duidelijk dat ook de vwo-leerlingen weten wat er moet gebeuren.
De Afdelingsuren betekenen ook dat Philip voor meer klassen verantwoordelijk is: niet voor vijf, maar voor negen. Meer docentenvergaderingen en nakijkwerk. Gelukkig middelt het uit. Hij is ook gastdocent op een andere afdeling; voor dat uur heeft hij geen voorbereiding of nakijkwerk.
Eric, die de Afdelingsuren schoolbreed regelt, maakt zich zorgen: collega Onno kan zijn draai op het Afdelingsuur niet vinden. Die heeft de wiskunde centraal staan en wat minder het leren van de leerling. Onno vindt het allemaal te ver af staan van gewoon lekker lesgeven. Dat geregel, het napraten met de vwo-leerlingen, het in goede banen leiden van lessen waar je zelf niet bij bent, allemaal zaken die niets met wiskunde te maken hebben, maar er wel bij blijken te horen.

## Wat heeft het gekost?

Maart 2002. Coördinator Eric maakt de balans op. Van twee lesuren naar één, van alleen voor je eigen klas staan naar het managen van vier klassen. Van het

uitleggen van pijlenkettingen tot het bespreken van wat er in een klas gebeurde met een vwo-leerling: het zijn nogal veranderingen. Het kost vooral tijd. Als coördinator van de Afdelingsuren praat hij veel: met collega's, met de schoolleiding, met het middenmanagement, met de medewerkers van de administratie. Alles om duidelijk te maken dat het geen gewone les is. Hij had er 24 taakuren voor, die waren na 4 weken al op. Net zoals de uren van de roosteraar: elke keer het rooster aanpassen kost tijd. De werving, begeleiding en beoordeling van de vwo-leerlingen hebben ook tijd gekost. Dit waren uren die normaal in projecten zitten, voor collega René niet extra, maar wel een project minder. En de begeleiding van de vwo-leerlingen ging altijd door: ook 's avonds laat op een schoolfeest of tijdens een open dag van de school. Je moet heel zuinig op ze zijn.

## Wat ging er fout?

Donderdag, het daltonuur. Weer zitten de vwo-leerlingen die lesgeven bij elkaar. Docent René opent de bijeenkomst met de constatering dat de volgende week het nieuwe trimester begint en dat er opnieuw een indeling gemaakt gaat worden. Wie gaat er door? Marian en Suzan steken hun hand op: zij gaan niet door. Ze vinden dat ze teveel politieagent moeten spelen, dat hadden ze toch anders verwacht. Cees en Richard hebben er ook genoeg van: ze hebben te vaak het eerste uur voor een gesloten deur gestaan: dan ging het uur niet door, en waren wel de eerste klassen gewaarschuwd maar werden zij vergeten. René slaakt een diepe zucht: deze schoonheidsfoutjes zijn haast niet te voorkomen. Gelukkig gaan de meeste vwo-leerlingen door. Ze vinden het uitleggen leuk, krijgen een goede band met 'hun' klas, zien het resultaat van de extra uitleg van Pythagoras direct terug in de voldoende van de zwakke leerling. Kortom: inspiratie genoeg!

## Wat ging er goed?

Tijdens de sectieborrel aan het einde van het jaar wordt teruggekeken. Hoe zijn die Afdelingsuren nu gegaan? De meningen verschillen. Kern is natuurlijk: hebben de leerlingen er wat aan gehad. De agenda's worden er bijgehaald en cijfers vergeleken. Er blijken geen grote verschillen te zijn. Niet onderling tussen collega's en ook niet met vorige jaren.
Ouders die in het begin terughoudend reageerden, hebben uiteindelijk weinig meer van zich laten horen. De strakke regie en eenduidige regeling van de verantwoordelijkheden heeft het verwachte effect gehad.
De collega's discussiëren over het voeren van de regie tijdens zo'n uur. Lekker lesgeven aan één klas, zelf het verhaal van de wiskunde vertellen, is er dan niet bij. Wel is het inspirerend zo bij elkaar in de les te kunnen kijken. De sectie is meer één team geworden. Vooral de Afdelingsuren die ruim in de vwo-leerlingen zaten zijn goed gegaan: de docenten konden dan hun aandacht richten op de zwakke leerlingen, terwijl de vwo-ers de gewone les deden.
Sectieleider René roemt het enthousiasme van de vwo-leerlingen. Zij hebben het aangedurfd om zomaar voor een klas te gaan staan en verantwoordelijk te zijn voor het leren van een klas. Vooral de groep die gevraagd is om mee te werken heeft een prima prestatie neergezet. Zij hebben het gedaan uit enthousiasme. De tweede lichting had ook wat leerlingen voor wie het cijfer voorop stond. En dat is toch te weinig motivatie voor zo'n zware taak. De vwo-leerlingen hebben hun projectopdracht met een ruime voldoende afgesloten. Ze kunnen terugkijken op een lessenserie waarin ze vooral veel over zichzelf geleerd hebben, en ze tussen de bedrijven door ook nog hun wiskunde hebben opgehaald.
Na de borrel treft René de conrector belast met de onderwijskundige ontwikkelingen in de school. De Afdelingsuren zijn een succes gebleken. Bewezen is dat bovenbouwleerlingen als tutor een belangrijk onderdeel van onderwijs kunnen vormen, ook bij andere vakken.

## Een jaar later...

Het is weer de week waarin de praktische opdrachten door docenten aangeboden worden. Wiskundedocent René biedt zijn 3e klassen havo/vwo en 3 tl de mogelijkheid om als klassenassistent mee te draaien tijdens de lessen die hij geeft aan een tweede klas. Een activiteit die de lessen van René effectiever maakt voor de tweedeklassers en waarvoor de leerlingen die als assistent aanwezig zijn gewoon een cijfer krijgen. Collega's Hans en Patricia hebben een aantal lessen van een eerste en vierde klas samengevoegd. Twee leerlingen uit de eerste zitten in de aula samen aan een tafel met twee leerlingen uit de vierde.
Beide activiteiten laten de oudere leerlingen uitleggen aan de onderbouwleerling. Vooral als herhaling van de basis erg nuttig. En omdat het om wiskunde gaat, met een duidelijke opbouw waarin het ook voor een uitleggende bovenbouwleerling snel duidelijk is of de gegeven uitleg klopt of niet, is het lesgeven redelijk te overzien. Een som is goed of fout, zodat je je kunt concentreren op de didactiek, de duidelijke uitleg van de tussenstappen en of de uitleg aankomt. Vooral de zwakke vwo-4 leerlingen - degenen die riepen dat ze er geen tijd voor hadden omdat ze wiskunde al moeilijk genoeg vonden - hebben veel uitleg gegeven: ze hebben ontdekt dat ze er zelf veel van opsteken.

*Noot*

*[1] De namen van de personen zijn verzonnen.*

*Over de auteur*

*Paul Ket (e-mailadres: pket@helenpark.nl) is docent wiskunde, verbonden aan de school voor daltononderwijs Helen Parkhurst in Almere. Vóór zijn overstap naar het voortgezet onderwijs is hij als onderwijskundige werkzaam geweest binnen verschillende faculteiten van de Universiteit Utrecht en bij IVLOS. Hij studeerde Toegepaste Onderwijskunde aan de Universiteit Twente en 2e graads wiskunde aan de Hogeschool van Utrecht.*

# LERAAR IN ONDERZOEK

## Hoe aantrekkelijk is het om je baan als wiskundedocent te combineren met onderzoek aan een universiteit? Een interview met Barbara van Amerom.

[ Klaske Blom ]

### Proefschrift

Barbara van Amerom verdedigde op 16 mei 2002 haar proefschrift[1] met als titel *Reinvention of early algebra* (*Heruitvinden van aanvankelijke algebra, Ontwikkelingsonderzoek rond de overgang van rekenen naar algebra*) en behaalde daarmee haar doctorsgraad. Ze voegt zich hiermee bij de kleine groep van gepromoveerde docenten in het wiskundeonderwijsveld in Nederland. Haar proefschrift is zeker een inhoudelijke bespreking waard, maar in dit artikel worden de accenten vooral gelegd op het doen van onderzoek naast het hebben van een onderwijsbaan. Een inhoudelijke bespreking van haar proefschrift vindt u in de *Nieuwe Wiskrant* (nr. 21-4, pp. 19-20). Haar ervaring met en ideeën over deze combinatie kunnen als inspiratiebron dienen voor docenten die zelf ook een dergelijke combinatie ambiëren.
Het doen van onderzoek als leraar is op het ogenblik bijzonder actueel door de stimulans die NWO hiervoor biedt in de vorm van financiële ondersteuning. Hoewel Barbara geen leraar-in-onderzoek was maar aio aan de Universiteit Utrecht, is zij een zogeheten ervaringsdeskundige op dit terrein. Haar inzichten stemmen tot nadenken, en ze dagen de wiskundegemeenschap uit tot reflectie op het wiskundeonderwijs. De moeite waard om kennis van te nemen, zo lijkt mij.

### NWO-onderzoeksprogramma voor docenten

De Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO) heeft sinds mei 2000 een nieuw onderzoeksprogramma voor wis- en natuurkundedocenten: ‘Leraar in Onderzoek’.
Op de NWO-website[2] valt te lezen:
*‘Het programma ‘Leraar in Onderzoek’ beoogt om eerstegraads leraren wis- en natuurkunde in de gelegenheid te stellen een aantal maanden wetenschappelijk onderzoek aan een universiteit te doen. Op deze manier komen de desbetreffende leraren voor een korte periode in nauw contact met een universiteit, nemen nader kennis van de manier van werken op de universiteit, ontwikkelen hun eigen onderzoeksvaardigheden en zullen hierdoor waarschijnlijk bewust of onbewust enthousiasme voor een universitaire studie aan de scholieren overbrengen. Het onderzoek kan puur wiskundig of natuurkundig van aard zijn, maar ook de didactiek betreffen of zich op meer toegepaste vraagstukken richten.’*
Het gaat daarbij om 60 tot 120 dagen onderzoek:
- óf tussen de drie en zes maanden aaneengesloten,
- óf een dag per week gedurende twee jaar,
- óf twee dagen per week gedurende een jaar.

*‘NWO-EW vergoedt de kosten die de school voor de vervanging van de leraar moet maken, verhoogd met een bedrag van 2270 euro als tegemoetkoming voor de verstoring die dit met zich meebrengt.’*

### Promotieonderzoek

Het onderzoeksidee van de NWO betreft dus maximaal 120 dagen. Uiteraard is dit qua tijdsinvestering onvergelijkbaar met het promotieonderzoek dat Barbara



gedaan heeft. Wel heeft zij altijd haar onderzoek gecombineerd met een baan in het onderwijs; op dat punt beschikt zij dus over veel ervaring.
Nadat ze haar postdoctorale lerarenopleiding had afgerond, is Barbara direct begonnen aan haar promotieonderzoek. In haar afstudeerproject combineerde ze de didactiek en de geschiedenis van de wiskunde. Het onderzoek *Reinvention of algebra* bestond uit een soortgelijke combinatie waardoor ze zich onmiddellijk tot dit onderzoek aangetrokken voelde. In haar onderzoek heeft de geschiedenis uiteindelijk een kleinere plaats ingenomen, omdat ze zich vooral gericht heeft op de didactische aspecten van de informele strategieën die door leerlingen gebruikt worden bij het leren van algebra.
Barbara is in totaal ruim zes jaar bezig geweest met haar promotieonderzoek. Gedurende de eerste vier jaar besteedde ze vier dagen per week aan haar onderzoek en was ze één dag werkzaam als wiskundedocente aan Het Nieuwe Eemland in Amersfoort. De laatste twee jaren verschoof deze verhouding naar het doen van twee dagen onderzoek en drie dagen lesgeven.

### Interview met Barbara van Amerom

Hoe aantrekkelijk is het om je baan als wiskunde-docent te combineren met het doen van onderzoek aan een universiteit? Welke meerwaarde heeft het? Welke voor- en nadelen kleven eraan?
Deze en andere vragen legde ik voor aan Barbara van Amerom.

*Wat is je mening over dit nieuwe onderzoeksproject ‘Leraar in Onderzoek’ van de NWO?*
Ik vind het een positief plan, maar ik zie niet goed in waarom alleen eerstegraads docenten in aanmerking kunnen komen voor een dergelijk onderzoek. Ik ken van zeer nabij enkele enthousiaste tweedegraders die als zij-instromers in het onderwijs terecht gekomen zijn en heel actief zijn op didactisch gebied. Ook deze mensen zouden verder didactisch onderzoek moeten kunnen doen om hun eigen interesse levend te houden en verder te komen met hun didactische inzichten. Bovendien kunnen hun collega’s daar ook weer plezier van hebben.

*Kun je je vinden in het doel van dit onderzoeksproject, het enthousiast maken van leerlingen voor een studie wiskunde?*
Het zal ongetwijfeld zo zijn dat je door een dergelijk onderzoek te doen leerlingen enthousiast maakt voor een academische opleiding. Maar ook zonder dat ik onderzoek deed probeerde ik ze warm te maken voor een universitaire opleiding door over mijn eigen studie- ervaringen te vertellen. Mijns inziens zou het een beter doel van een dergelijk onderzoek kunnen zijn om los te komen van de dagelijkse en routinematige onderwijspraktijk en opnieuw gemotiveerd te raken door de nieuwe ervaring die je opdoet. In mijn geval maakte het dat ik meer plezier in mijn werk kreeg. Ik vind het leuk om in mijn eigen lessen ervaringen te verwerken die ik met mijn onderzoek heb opgedaan.

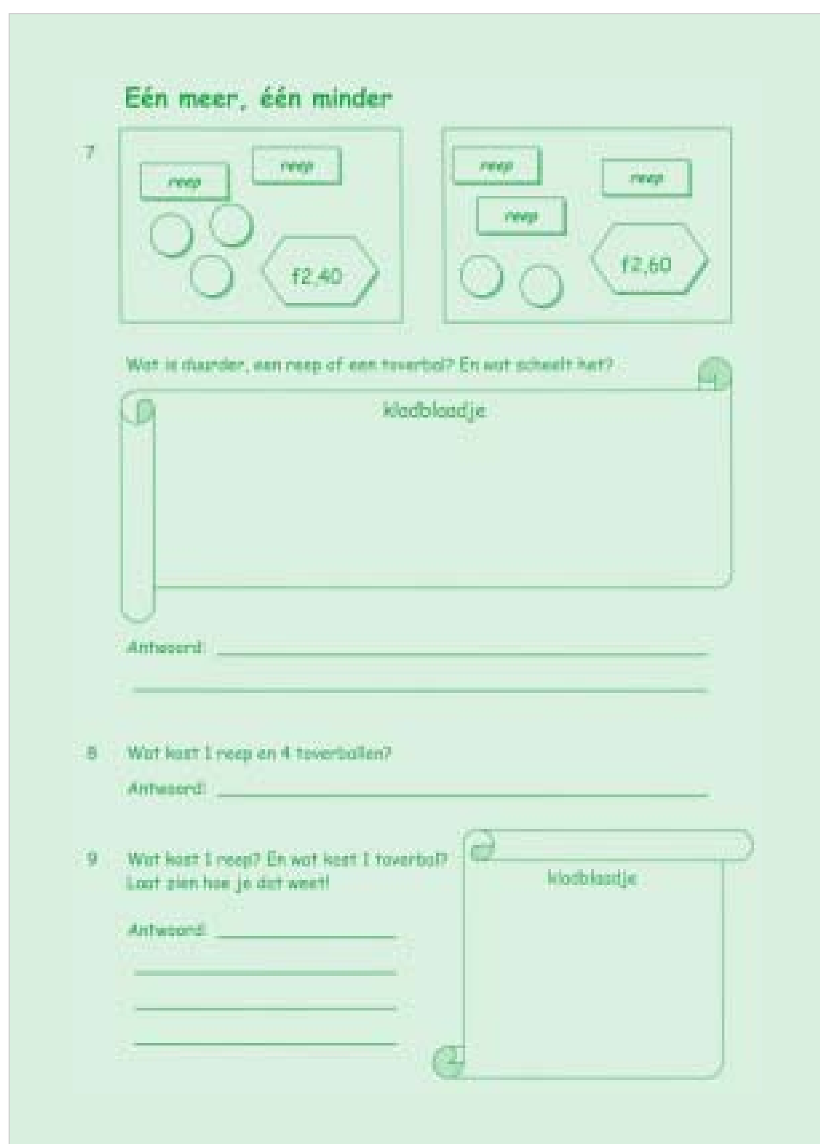
Zo probeer ik bijvoorbeeld om leerlingen eerst te laten ‘spelen’ met informele, pre-algebraïsche strategieën voordat ik ze met de formele oplossingsstrategieën laat werken. Uit meerdere onderzoeken is gebleken dat het belangrijk is om leerlingen in het leerproces de tijd te geven voor hun eigen informele oplossingsmethoden omdat ze dan een methode hebben om op terug te vallen als de formele oplossingsmethode nog te moeilijk voor ze is.

In mijn havo-4-groep gebruik ik deze aanpak bijvoorbeeld bij het aanleren van het oplossen van stelsels vergelijkingen: ik maak iconische stelsels, dat wil zeggen met alleen getekende plaatjes, bijvoorbeeld over het uitwisselen van repen en suikerballen (zie figuur 1).
Leerlingen blijken in eerste instantie te gokken naar een oplossing van een dergelijk stelsel. Het vinden van de goede oplossing kan op die manier lang duren. Hierdoor komt als vanzelf de wens bij een leerling op het oplossingsproces te bekorten. Als je dan als docent expliciet vraagt naar hun redenering en ze deze laat verwoorden, komen ze zelf tot de conclusie dat het beter is hun gok bij te stellen door er ‘1 bij of 1 af’ te doen. Op den duur is er altijd wel een leerling die opmerkt dat er één onbekende geëlimineerd moet worden. Het mooie van deze manier van werken is dat leerlingen kunnen terugvallen op hun eigen informele intuïtieve werk als het formele niveau te moeilijk is. Ik merk dat het motiverend en zinvol is om de tijd te nemen voor een dergelijke aanpak.

Een ander concreet effect van mijn onderzoek is dat ik probeer heel bewust om te gaan met de reflectievragen in de methode. Ik sla ze niet zonder meer over om bijvoorbeeld tijd uit te sparen, want ik heb het belang ervan bij het zelfontdekkend leren ervaren. Reflectie dwingt leerlingen vaak tot perspectief-wisselingen, tot praten over het geleerde, tot communiceren over wiskunde; allemaal facetten die het leren van wiskunde positief beïnvloeden.

*Het thema van je onderzoek was het zelfontdekkend leren van algebra, een zuiver didactisch onderwerp dus. Hoe denk je over het soort onderzoek dat gedaan kan worden in dit project ‘Leraar in Onderzoek’?*
Persoonlijk vind ik dat elke wiskundedocent die een dergelijk onderzoek gaat doen een didactisch onderwerp zou moeten kiezen. *Als je namelijk onderzoek gaat doen vanuit een persoonlijke interesse binnen een niet-didactisch wiskundig gebied,* heeft dat geen impact op het dagelijks werk in de klas. Je didactiek zal er niet door veranderen, al voel je je zelf misschien persoonlijk wel meer geïnspireerd. En leerlingen hebben er juist profijt van als de didactiek van het wiskundeonderwijs nog verder ontwikkeld en verbeterd wordt. Alleen al op het gebied van de algebra zijn allerlei didactische onderwerpen de moeite waard om onderzocht te worden. Ik heb nog wel een paar ideeën: onderzoek naar de specifieke algebraïsche leerproblemen van leerlingen, of onderzoek naar het moment waarop in het algebra-onderwijs de stap gezet moet worden van informele naar formele oplossings-methoden. Ook een meer theoretisch wiskundig onderzoek zou denk ik best geschikt zijn, als het daarna maar zijn neerslag krijgt in bijvoorbeeld een Zebra-boekje; daarmee krijgt het een concrete toepassing in het onderwijs. Zolang de opgedane ervaringen concreet vertaald worden naar de klas, is het de investering waard geweest. Per slot van rekening is er toch veel geld mee gemoeid...

*Welke voordelen zie je in de combinatie van onderzoek doen en lesgeven?*
Allereerst maakte de combinatie van onderzoek en lesgeven het werk heel gevarieerd.
Het bezig zijn met onderwijsvernieuwing kan zeer voedend en stimulerend zijn voor jezelf. Ikzelf raakte geïnspireerd doordat ik een nieuwe kijk kreeg op mijn eigen lessen. Bovendien kun je op school in je sectie bijdragen aan inhoudelijke vernieuwing door je kennis en ervaringen over te dragen.
Omdat ik op het Freudenthal Instituut werkte, had ik een werkkring van mensen die allemaal bezig zijn met didactische vernieuwing. Het voordeel daarvan is dat mensen met veel verstand van zaken heel bereikbaar waren en voor mij was dat bijzonder motiverend.



FIGUUR 1

Daarnaast had ik het benodigde materiaal tot mijn beschikking en bleef zo op de hoogte van de nieuwste ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs. Ik zou leraren dus altijd aanraden om deel te nemen in een didactisch onderzoeksteam.
Tenslotte is er nog een voordeel voor de academische wereld: het is goed voor de fulltime wetenschappelijk medewerkers die aan onderwijsvernieuwing werken, als ze contact houden met het onderwijsveld. Het komt nog geregeld voor dat in het denken en praten over onderwijs de plank wordt misgeslagen door mensen die niet meer in de lespraktijk staan. Het is belangrijk dat leraren hun dagelijkse ervaringen delen.

*Welke obstakels ben je tegengekomen terwijl je onderzoek deed en lesgaf?*
Het was moeilijk om mijn aandacht te verdelen over twee banen, met name ook omdat het karakter van het werk zo verschillend was. Een school heeft korte deadlines, proefwerken moeten worden nagekeken, toetsen worden gemaakt, lessen moeten worden voorbereid; en onderzoek doen is vaak een kwestie van lange-termijnplanningen, zeker in het begin als je nog niet aan het schrijven bent. Ik moest erg oppassen om niet altijd voorrang te geven aan de korte deadlines waardoor de tijd voor mijn onderzoek me door de vingers glipte. Prioriteiten stellen is iets wat ik in de loop van de jaren steeds beter geleerd heb, maar het bleef lastig. Een ander nadeel van het hebben van twee banen is dat er ook twee werkgevers zijn die aan je trekken. En verder had ik nog de extra reistijd, omdat ik op één dag op twee plekken werkte.

*In hoeverre komen jouw eigen onderzoek en de ervaringen die je daarmee opdeed ten goede aan leerlingen en collega's?*
Uiteraard hoop ik, en zie ik ook wel, dat het mijn leerlingen ten goede komt dat ik me verder didactisch bekwaam. Met collega's heb ik nog weinig gesproken over de resultaten van mijn onderzoek, o.a. door een vrijwel constant gebrek aan tijd. De schoolorganisatie vraagt veel investering van ons in ons gewone dagelijks werk. Daarnaast worden we erg in beslag genomen door het ontwikkelen van praktische opdrachten, studiewijzers, verschillende werkvormen en vakoverstijgende thema's etcetera, zodat er weinig tijd overblijft voor inhoudelijke verdieping. Dit zijn zaken waar niemand iets aan kan doen, maar het is wel jammer dat er daardoor zo weinig tijd overblijft om ons inhoudelijk te verdiepen.

*Zou je tot slot aanbevelingen willen doen voor een invulling van een dergelijk project als 'Leraar in Onderzoek'?*
Het zou mooi zijn als er in Nederland een langlopend didactisch onderzoek gedaan zou worden, bijvoorbeeld naar de overgang van rekenen in groep 8 naar wiskunde in de brugklas en daarna naar algebra in de Tweede fase. Onderwijsmensen zouden dan een tijd in zo'n onderzoek mee kunnen draaien om te zorgen voor meer uitwisseling tussen onderwijsveld en academische vernieuwers. Daarnaast heeft het als voordeel dat je als onderzoeker vrij snel bent ingevoerd in de materie. Een eigen zelfstandig onderzoek heeft vaak een lange aanlooptijd nodig en die tijd is er in dit project niet.
Het is wel noodzakelijk dat het Nederlandse onderwijs tot rust komt zodat er weer plek is voor inhoudelijk didactische overdenkingen die nu in het gedrang komen door de veeleisende uitvoering van de Tweede fase en het vernieuwde leerwegenstelsel in het vmbo. Ook zou het goed zijn als een volle baan van 26 uur werd teruggebracht tot 20 uur (zoals in onze buurlanden), zodat je wekelijks bezig kunt zijn met de verdieping van je eigen kennis. Mijns inziens zou je dit namelijk structureler moeten aanpakken dan in het project 'Leraar in Onderzoek' wordt gerealiseerd; een handjevol mensen dat zich academisch wetenschappelijk schoolt, zal marginaal effect op het totale onderwijsveld hebben.

## En nu

Barbara van Amerom geeft op dit moment drie dagen les en heeft haar onderzoekswerk beëindigd. Het is niet eenvoudig om een stapje terug te doen: ze wordt van meerdere kanten gevraagd om meer ruchtbaarheid te geven aan haar bevindingen. Ze ervaart dit als een paradox: enerzijds is het zeer bevrijdend dat het onderzoek afgerond is en ze meer tijd heeft voor huis en haard, anderzijds zijn er door haar onderzoekswerk deuren open gegaan die ze graag zou willen betreden, maar niet nu. Hiermee omgaan, dat is de kunst.
In de hoop dat ze anderen zullen stimuleren tot activiteit op het gebied van de ontwikkeling van ons wiskundeonderwijs, dank ik Barbara van Amerom hartelijk voor haar praktische en persoonlijke overwegingen!

*Noten*

*[1] Het proefschrift is als boek verkrijgbaar:*
*B.A. van Amerom, Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra, Utrecht: CD-Bèta-Press, Centre for Science and Mathematics Education (CD-Bèta wetenschappelijke bibliotheek; nr. 41), ISBN 90-73346-48-7, voorzien van een Nederlandse samenvatting.*
*[2] Nadere informatie over het onderzoeksprogramma 'Leraar in Onderzoek' van de NWO is te vinden op de website: www.nwo.nl/subsidiewijzer.nsf/pages/NWOA_4XHBL7?Opendocument.*

*Over de auteur*

*Klaske Blom (e-mailadres: kablom@tiscali.nl) werkt als wiskundedocente op het Hooghe Landt in Amersfoort. Zij is tevens redacteur van Euclides.*

Het Ratio-team

# RATIO: COMPUTER ÈN LERAAR

**Wiskundelessen op de computer zijn te arm; 'ouderwetse' lessen zijn onmisbaar [1]. Hoe de ICT-methode Ratio dit probleem concreet oplost.**

**[ Mascha Honsbeek, Leon van den Broek ]**





Ratio is een instituut binnen de subfaculteit wiskunde van de KUN, opgericht om de interesse in wiskunde – en in bètastudies in het algemeen – te bevorderen. Een team van wiskundeleraren en medewerkers en studenten van de KUN ontwikkelt een ICT-wiskundemethode voor het vwo, te beginnen met de klassen 1, 2 en 3. De Ratio-methode wordt aangeboden via het internet en is vrij toegankelijk; als tegenprestatie ontvangt Ratio van de testscholen graag hun ervaringen.

## Interactief

Ratio ontwikkelt een interactieve wiskundemethode; logisch dat de computer een grote rol speelt in de Ratio-lessen. De voordelen zijn duidelijk: applets introduceren en verhelderen de onderwerpen, oefenopgaven zijn eenvoudig te genereren, via links zijn er veel mogelijkheden tot verdieping, leerlingen kunnen in hun eigen tempo werken en correctie van het werk gaat eenvoudig en snel. Maar daarmee heb je nog geen goed onderwijs. De computer kan de medeleerlingen en de docent niet vervangen. Al eerder schreven we in Euclides[2] dat we zochten naar een goede verhouding tussen werken achter de computer en traditioneel met pen en papier. Inmiddels zijn de eerste ervaringen met het Ratio-hoofdstuk Hoeken opgedaan. Die bevestigen dat de klassikale momenten – los van de computer – wezenlijk zijn in de cursus.

## De problemen

Het leren van nieuwe zaken gaat niet vanzelf. Ook in het gunstige geval dat een leerling de opgaven kan maken en de theorie snapt, is hij er nog niet.
Leerlingen kunnen maar moeilijk hoofd- en bijzaken in een wiskundehoofdstuk scheiden: wat is inleiding, wat is illustratie, wat is voorbeeld? Ook ‘goede’ leerlingen halen vaak niet zelfstandig uit de leermaterialen wat erin zit: de grote lijn is onduidelijk. Dat maakt onzeker: ze hebben behoefte aan een bevestiging van - of correctie op - wat ze geleerd hebben. Als voorbereiding op het proefwerk beginnen leerlingen vaak het hoofdstuk van voren af aan opnieuw door te nemen, en komen dan bijvoorbeeld maar halverwege. Of, en dat is het andere uiterste, ze weten niet waar te beginnen en doen dus maar helemaal niets ter voorbereiding op het proefwerk.
Als de leerling het hoofdstuk in bijvoorbeeld twee zinnen kan samenvatten, heeft hij/zij het goed begrepen. Dat wil overigens niet zeggen dat hij alleen zo’n samenvatting hoeft te kennen. Wiskunde-leren kost tijd. Door wekenlang aan een onderwerp te werken, problemen en probleempjes aan te pakken, raakt de leerling thuis in het onderwerp, wordt vaardig en kan zichzelf bij min of meer nieuwe opgaven redden.

Maar ook de docent heeft problemen bij eenzijdig ICT-onderwijs. Het is ondoenlijk voor hem het leerproces te managen. Hij heeft geen zicht en geen grip op de vorderingen van de verschillende groepjes in de klas.

## De Ratio-oplossing

Voor effectief en gecontroleerd onderwijs met tevreden leerlingen is klassikale interactie essentieel. Daarvoor biedt Ratio drie soorten papieren materialen om het leerproces af te ronden.
1. ‘Overzichten’ per paragraaf. De leerlingen vatten de stof samen en passen die vervolgens toe in enkele karakteristieke opgaven.
2. ‘Toets jezelf.’ Na afloop van het hoofdstuk is er een toets die gelijkwaardig is aan het proefwerk.
3. ‘Materialen voor een klassengesprek.’ Dit zijn extra vragen die de docent kan gebruiken om een klassengesprek te organiseren. Het accent ligt niet op concrete opgaven, maar op de hoofdideeën in het hoofdstuk en de samenhang tussen de verschillende begrippen.
De bedoeling van de materialen voor een klassengesprek is de docent ideeën aan te reiken. Omdat de individuele stijl van de docent een grote rol speelt bij de invulling van de les en omdat de beschikbare tijd sterk uiteen loopt, zijn de ideeën niet afgerond tot pasklaar materiaal. In plaats daarvan is gekozen voor een open verzameling van ideeën: handreikingen waarmee de docent zelf een klassengesprek kan organiseren.
Het is ook goed mogelijk dat de docent een onderdeel van de materialen aan het begin van een les aan de orde stelt. Dit bijvoorbeeld om te controleren of de leerlingen een basisvaardigheid onder de knie hebben.
De bij elk hoofdstuk terugkerende onderwerpen zijn:
- *Gereedschappen*. Dat zijn de technieken die de leerlingen kunnen inzetten om vraagstukken op te lossen
- *Vragen*. Daarbij gaat het om de *aanpak* van het vraagstuk en niet om het vinden van de concrete uitkomst; *welke* gereedschappen worden achtereenvolgens ingezet?
- *Hoofdzaken*. Een zeer bondige samenvatting van het hoofdstuk.
- *Samenhang*. De samenhang van de stellingen en begrippen wordt gepresenteerd: wat is een bijzonder geval, wat een generalisatie?
- *Leerling-opgaven*. De leerlingen ontwerpen zelf opgaven; de beste komt in het proefwerk.

In de testfase zal ook het docentenmateriaal gratis te verkrijgen zijn. Waarschijnlijk zal Ratio op termijn voor dit extra materiaal een kleine bijdrage vragen, om de continuïteit te kunnen garanderen.

## De voordelen van het klassengesprek op een rijtje

- sociaal: leerlingen wisselen ervaringen en inzichten uit;
- inspirerend: het enthousiasme van de docent werkt aanstekelijk;
- afwisselend: variatie in werkvorm voorkomt sleur;
- tijdbesparend: de leerling bereidt zich voor op het proefwerk;

- controlerend: de leraar verzekert zich ervan dat iedereen kennis neemt van de stof;
- samenvattend: de leerling krijgt een overzicht over de stof;
- onderscheidend: de leraar legt accenten op die dingen waar het eigenlijk om gaat;
- onderwijzend: de leraar legt centrale dingen uit de stof nog eens uit.

## De stand van zaken

De hoofdstukken Hoeken, Machten en Ontbinden zijn af. Op dit ogenblik (april 2003) wordt het hoofdstuk Kwadraten en Wortels ontwikkeld. De hoofdstukken worden getest op verschillende scholen. Daarna zal de Ratio-formule vaste vorm hebben gekregen en kan de methode systematisch worden geschreven te beginnen met het eerste hoofdstuk. Zodra een hoofdstuk gereed is om getest te worden op scholen, is het te vinden op de website *www.ratio.kun.nl* onder het kopje 'Cursussen'. Op dit moment staat daar alleen het hoofdstuk Hoeken. Binnenkort zullen ook de andere hoofdstukken daar verschijnen.

## Nadere informatie

Voor meer informatie kunt u contact opnemen met Mascha Honsbeek, e-mail: *info@ratio.kun.nl*, tel. 024-3652997. Zie verder *www.ratio.kun.nl*







Uit 'Materialen voor een klassengesprek' bij Hoeken

*Noten*

*[1] Harrie Broekman: De essentie van het leren van wiskunde ... zonder inspirerende docent, Euclides 77, nr. 2, pp.042-044.*
*[2] Mascha Honsbeek: Ratio, Euclides 77, nr. 5, pp.244-245.*

*Over de auteurs*

*Mascha Honsbeek is promovendus aan de subfaculteit wiskunde van de KUN. Ze werkt daar ook als voorlichter wiskunde en als coördinator van het project Ratio.*
*Leon van den Broek is leraar wiskunde aan RSG Pantarijn te Wageningen. Hij is gedetacheerd bij de subfaculteit wiskunde van de KUN, waar hij o.a. auteur is van Ratio en de Kangoeroewedstrijd organiseert.*

Doelen van WisKids zijn: enthousiasme voor wiskunde bevorderen bij jongeren, het imago van wiskunde verbeteren, jongeren uitdagen via wiskunde, en belangstelling bevorderen voor de exacte vakken.
WisKids is een gezamenlijk initiatief van het Wiskundig Genootschap (WG), de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) en de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs (NVORWO).
Partners in WisKids zijn Ratio (KUN), Perspectief (STW/NWO en NVvW), Vierkant voor Wiskunde, Pythagoras, Wiskunde Olympiade en het Freudenthal Instituut. WisKids werkt samen met APS en SLO.
Financieel is WisKids mogelijk gemaakt door het Ministerie van OC&W, de Stichting Axis en de Stichting Arbeidsmarkt en Opleiding Metalektro.
Het prijzengeld van de Wiskunde Scholen Prijs wordt mede gesponsord door NOCW en door de NVvW.
Meer informatie: *www.fi.uu.nl/wiskids* of per email: *wiskids@fi.uu.nl*



# DE LAPTOPKLAS

[ Bart ter Veer, David van de Beld, Martin Traas ]

## Inleiding

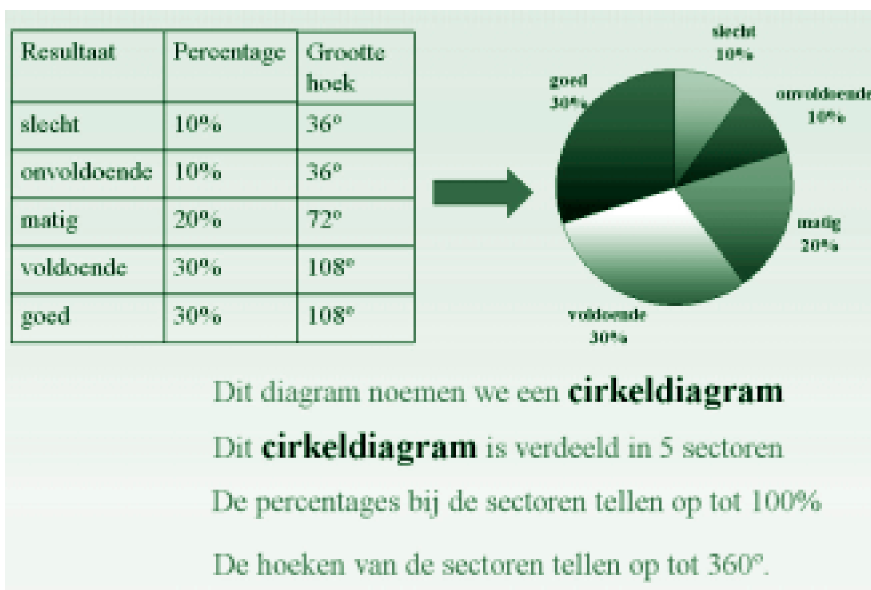
In het schooljaar 2000-2001 is op het Zernike College Groningen in de Montessori-stroom een laptopklas gestart. Alle leerlingen in deze klas beschikten over een laptop en gebruikten deze intensief tijdens en buiten de lessen. In hetzelfde jaar werd een onderzoek gestart naar de inzetbaarheid en effectiviteit van laptops in het onderwijs. Dit onderzoek werd gedaan onder supervisie van Anne van Streun, hoogleraar in de didactiek van de Wiskunde en Natuurwetenschappen. Dit artikel is een vervolg op ‘Elke leerling een computer’ in Euclides 78-2 (oktober 2002); het beschrijft de ervaringen van de laptopklas in 2001-2002.
Het project werd in het schooljaar 2001-2002 uitgebreid naar één tweede klas en twee brugklassen. Twee nieuwe afstudeerders (Bart ter Veer en David van de Beld) gingen verder met het laptopproject en ontwikkelden lesmateriaal voor de tweede klas. Vervolgens onderzochten zij of het gebruik van computers de leeropbrengsten heeft verhoogd.

## Opzet onderzoek

Er is een behoorlijke hoeveelheid educatief materiaal te vinden bij uitgevers en op internet (o.a. applets). Het gaat hier echter om additioneel lesmateriaal, waarbij de leerlingen ook nog een boek nodig hebben. Een groot nadeel van deze combinatie is dat leerlingen de leerstof uit verschillende bronnen moeten halen, waardoor ze het overzicht kwijt kunnen raken. Een leerling moet de laptop opstarten voor één of twee kleine leermomenten, waarbij het opstarten veel tijd in beslag neemt. Daarom was een van de aanbevelingen uit 2000-2001 een hoofdstuk uit het boek compleet te vervangen door digitaal lesmateriaal.
De onderzoekers besloten zelf digitaal lesmateriaal te gaan ontwikkelen waarin oefeningen en theorie geïntegreerd zijn. Ze hebben de hoofdstukken over de stelling van Pythagoras, statistiek en kansrekening vervangen door digitale versies, omdat dit de hoofdstukken zijn waar de computer een uitstekende rol kan spelen bij het geven van de feedback.
Vooraf werd een aantal doelstellingen geformuleerd. Zo moet het lesmateriaal een bijdrage leveren aan het ontwikkelen van algemene computervaardigheden van de leerlingen. Informatie opzoeken via internet en het werken met standaardfuncties in Microsoft Office pakketten krijgen de meeste aandacht. Daarnaast was het de bedoeling, de mogelijkheden die de computer biedt optimaal te benutten. Het idee ging daarbij uit naar interactieve mogelijkheden waarbij elke leerling net zoveel oefening krijgt totdat hij de stof beheerst, waarbij dus het niveau van het materiaal wordt aangepast aan de leerling.
Tijdens het gebruik van het lesmateriaal is de klas geobserveerd. Bovendien hebben de onderzoekers getoetst in hoeverre het lesmateriaal aan de verwachtingen voldeed.

## Het lesmateriaal

De digitale variant van het hoofdstuk over de *stelling van Pythagoras* begint met een inleidende pagina, gevolgd door werkbladen in Excel, waarin een grote hoeveelheid opgaven afgewisseld wordt met kleine stukken theorie. In het programma Excel kunnen gebruikers gegevens invoeren in cellen. Met deze gegevens kunnen vervolgens diverse berekeningen worden gemaakt. Het geven van feedback is met dit programma vrij eenvoudig te realiseren. Bovendien is Excel gebruiksvriendelijk en is het programma bij de leerlingen al redelijk bekend. Bijkomend voordeel is dat leerlingen in het programma ook heel gemakkelijk zelf tabellen kunnen maken.
Bij de hoofdstukken *statistiek en kansrekening* is de theorie gescheiden van de oefeningen in de werk-



| Resultaat | Percentage | Grootte hoek |
| --- | --- | --- |
| slecht | 10% | 36° |
| onvoldoende | 10% | 36° |
| matig | 20% | 72° |
| voldoende | 30% | 108° |
| goed | 30% | 108° |



**FIGUUR 1 Een afgespeelde presentatie over cirkeldiagrammen**

bladen. De theorie van die hoofdstukken wordt aangeboden in dynamische presentaties (PowerPoint; zie figuur 1), de opgaven wederom in Excel. Verder is een samenvatting van de theorie beschikbaar op een html-pagina. Deze pagina is vanuit de werkbladen oproepbaar door middel van hyperlinks.
Bij het maken van de opgaven krijgen de leerlingen feedback op hun invoer. Dit gaat vaak verder dan de controle van het antwoord; bij verschillende fouten worden passende hints gegeven. Dit is met de huidige lesmethodes onmogelijk. Op dit vlak biedt de computer dus een didactische meerwaarde ten opzichte van die methodes. Het risico van het geven van dergelijke aanwijzingen is dat leerlingen gedachteloos de opgaven maken. Hiermee wordt rekening gehouden (zie figuur 2 en 3).
Met een computerprogramma moet het mogelijk zijn om na een fout antwoord een gelijkwaardige opgave aan te bieden, net zolang tot de leerling in staat is de opgaven te maken; pas dan gaat hij naar nieuwe theorie. Iedereen krijgt net zoveel oefening totdat hij de stof beheerst; het niveau wordt aangepast per leerling. Het is echter niet gelukt om lesmateriaal te ontwerpen dat zich aanpast aan het niveau van de leerling. De onderzoekers hebben daartoe pogingen gedaan, maar hadden niet de programmeerkennis om dit zelf te realiseren. Wanneer dit gerealiseerd wordt, kan het de tweede didactische meerwaarde van de computer zijn.

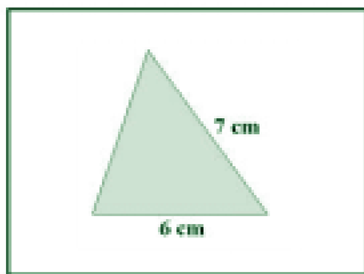
Voor docenten is bij het lesmateriaal een handleiding beschikbaar met daarin verschillende gebruiksmogelijkheden in de les.

## Hypothesen en conclusies

Aan de hand van het ontworpen lesmateriaal hebben de onderzoekers een aantal hypothesen geformuleerd. Het toetsen ervan was niet mogelijk vanwege de kleine steekproefgrootte. De (on)waarheid van de hypothesen kan slechts aannemelijk worden gemaakt.
*- Leerlingen kunnen zonder hulp van de docent de opgaven maken.*
Deze verwachting kwam niet uit. Uit observaties bleek dat leerlingen juist veel hulp vroegen aan docenten en medeleerlingen.
*- Na het doorwerken van het lesmateriaal hebben de leerlingen de leerdoelen gehaald.*
Gemiddeld zijn de proefwerken over de stelling van Pythagoras en statistiek goed gemaakt ten opzichte van andere proefwerken; kansrekening was matig. Hiermee lijkt de hypothese grotendeels gerechtvaardigd. Interessant is om na te gaan of het lesmateriaal hierop een grote invloed heeft gehad. In vergelijking met de parallelklassen (waar geen laptop gebruikt werd) heeft de laptopklas beter gescoord bij de identieke proefwerken (op papier) over de stelling van Pythagoras en statistiek. Bij het proefwerk kansrekening zit de score van de laptopklas tussen die van beide parallelklassen in. Een vergelijking met eerdere proefwerken van dezelfde klassen gaf zeker geen aanleiding om te veronderstellen dat de laptop-klas in het algemeen beter was. De voorzichtige conclusie is dat het digitale lesmateriaal een goed middel is om de leerdoelen te bereiken.
*- Leerlingen vinden het leuk om met het lesmateriaal te werken.*
De leerlingen van de laptopklas hebben een cijfer

Opgave 3

Bereken de lengte van de ontbrekende zijde.

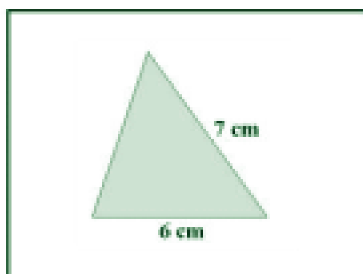



| zijde | kwadraat |
|---|---|
| 6 | |
| | |
| 7 | |



Opgave 3

Bereken de lengte van de ontbrekende zijde.




| zijde | kwadraat |
|---|---|
| 6 | 36 |
| | 13 |
| 7 | |



**FIGUUR 2** In deze driehoek is de stelling van Pythagoras niet toe te passen

**FIGUUR 3** Het gedachteloos invullen wordt afgestraft

gegeven voor het ontwikkelde lesmateriaal. Het gemiddelde cijfer is een ruime zeven. Tevens gaf de docent aan dat de leerlingen met enthousiasme en inzet aan het materiaal hebben gewerkt. Hoewel deze hypothese subjectief is geformuleerd, geven deze argumenten aanleiding om te denken dat de hypothese op waarheid berust.

## Hoe gaat het met de twee brugklassen? De resultaten in leerjaar 1

Vorig schooljaar is bij enkele onderwerpen in de eerste klas een aantal paragrafen vervangen door een werkblad, waarbij de laptop als ondersteuning werd gebruikt. Dit jaar zijn de werkbladen waar nodig aangepast en verbeterd. Er is geen nieuw materiaal ontwikkeld. De onderzoekers hebben de resultaten van de twee laptopklassen vergeleken met de resultaten van de twee parallelklassen. Daarbij werd rekening gehouden met de instroomgegevens van de leerlingen (cito-scores en niveau-advies van de basisscholen).

In tabel 1 staat aangegeven welke hoofdstukken worden getoetst en welke programma's de leerlingen uit de laptopklas gebruikten. In tabel 2 staan de resultaten van de leerlingen. In de tabel staat met percentages aangegeven hoeveel leerlingen een voldoende/goed op hun toets haalden in deze klas. Bij bestudering van de cijfers blijkt dat de leerlingen die gebruik maken van een laptop beter scoren op de toetsen 3, 4, 8 en 9 en minder goed scoren op de toetsen 6 en 7 in vergelijking met de resultaten van de parallelklassen.
In de eerste hoofdstukken van 'Moderne wiskunde' kunnen de leerlingen een goede start maken met het vak wiskunde. Leerlingen leren werken met roosterpapier, met een geodriehoek en met een passer. Verschillende eenvoudige begrippen komen aan bod, zoals kijklijnen en evenwijdige lijnen. Daarom is er wellicht nog geen niveauverschil tussen de laptopklas en de parallelklas. De laptopleerlingen leren echter wel goed omgaan met de programma's Cabri en Excel.
Bij toets 3 en 4 is veel gebruik gemaakt van de mogelijkheden van de laptop. De leerlingen zijn dan al enkele maanden met de laptop aan het werk en kunnen er goed mee omgaan. De leerlingen mèt een laptop maken deze toetsen beter dan de leerlingen zonder laptop.
Bij toets 8 hebben ook de laptopleerlingen geen gebruik gemaakt van de laptop. In het hoofdstuk 'Vergelijken', worden echter veelvuldig grafieken en tabellen gebruikt. Het is een vervolg op hoofdstuk 5 (toets 3). Misschien hebben de laptopleerlingen hier meer voordeel van.
Toets 7 is een werkstukopdracht. Ook de parallelklassen hebben dit werkstuk gemaakt en hebben in een computerlokaal gewerkt. Voor deze leerlingen is het werken met een computer 'nieuw' en zij waren ook enthousiaster aan het werk dan de laptopleerlingen.
Aan het eind van het jaar werd een afsluitende toets afgenomen waarin alle belangrijke onderwerpen die het jaar waren behandeld aan bod kwamen. Deze toets was voor alle leerlingen gelijk. De scores van de laptopleerlingen waren goed.

De resultaten van dit jaar stemmen overeen met de resultaten van vorig jaar. In het eerste jaar lagen de instroomadviezen en CITO-scores van de klassen

| Toets | Onderwerp | Hoe hebben de laptopleerlingen gewerkt? |
|---|---|---|
| T1 | H1 en H3: Lijnen en cirkels/Plaatsbepalen | Werkbladen Cabri |
| T2 | H2 en H4: Verhoudingen/Breuken | Werkbladen Excel |
| T3 | H5: Grafieken | PowerPoint/ VU-grafiek |
| T4 | H6 en H9: Kijken naar ruimtefiguren/Maten | Camera-opname; Doorzien; Cabri |
| T5 | H8: Negatieve getallen | |
| T6 | H7: Regels ontdekken | |
| T7 | Werkstuk Hoeken en vlakke figuren | Cabri |
| T8 | H10 en H12: Formules/Vergelijken | |
| T9 | Jaartoets over alle stof | |

**TABEL 1 Het computergebruik bij de hoofdstukken in klas 1 (2001-2002)**

dichter bij elkaar en dit gold ook voor de toetsresultaten. Vorig jaar werden toets 2 en toets 3 beter gemaakt door de laptopleerlingen. Bij de overige toetsen waren er geen verschillen tussen de laptopklas en de parallelklassen.

De onderzoekers concluderen dat de laptopklassen geen slechtere resultaten halen dan de andere klassen en op enkele onderdelen zelfs beter presteren. Omdat het om kleine groepen gaat, is het lastig om aan te tonen dat dit verschil geheel te danken is aan het gebruik van de laptop. Het lesmateriaal zal door meer groepen gebruikt moeten worden en het hele onderzoek moet dan over meerdere scholen verspreid worden. De laptop heeft een meerwaarde; de leerlingen presteren zeker niet minder en zijn veel beter in staat om met allerlei bekende programma's om te gaan. De leerlingen in de parallelklassen kunnen niet zo goed omgaan met Cabri en Excel en hebben nog nooit gewerkt met VU-Grafiek, VU-Stat en Doorzien.

## Aanbevelingen

De resultaten zijn over het algemeen positief. Leerlingen hebben goede cijfers gehaald en bovendien veel computervaardigheden opgedaan. De onderzoekers zien zeker voordelen van het intensieve computergebruik in de les, maar hebben tijdens het onderzoek ondervonden dat er nog veel moet gebeuren voordat de integratie van computers in het onderwijs voltooid is. Om dit proces te versnellen komen zij met de volgende aanbevelingen:

*- Zorg voor structurele professionele ontwikkeling van educatief digitaal lesmateriaal.*

Na het project statistiek en kansrekening kwamen de onderzoekers tot de conclusie dat een programmeur in het ontwerpteam een toegevoegde waarde zou hebben. Daarnaast zijn zij van mening dat de regering een actievere rol zou moeten spelen om kwalitatief hoogwaardig educatief digitaal lesmateriaal op de markt te krijgen. Het huidige aanbod is voor het grootste deel additioneel en is bovendien weinig of niet samenhangend.

*- Bied verschillende opgaven aan, afhankelijk van het niveau van de leerling.*

De onderzoekers zien grote voordelen van en zeker mogelijkheden voor dergelijke programma's, maar zelf zijn zij er niet in geslaagd om materiaal te ontwerpen dat zich aanpast aan het niveau van de leerling.

*- Zorg voor overzichtelijke leermiddelen zodat leerlingen hun informatie niet uit meerdere bronnen hoeven te putten.*

In het jaar 2000-2001 deden Neeltje Doggen en Annelies Wijnbergen de aanbeveling om een hoofdstuk geheel te vervangen in plaats van additioneel lesmateriaal te ontwikkelen. Nu is gebleken dat dit mogelijk is, maar de onderzoekers willen er niet voor pleiten om boek en schrift af te schaffen. Om het voor de leerlingen overzichtelijk te houden, zijn zij er een voorstander van om sommige hoofdstukken geheel digitaal aan te bieden en andere geheel met boek en schrift.

| Toets | Onderwerp | Laptopklas | | Parallelklas | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1K | 1L | 1H | 1J |
| T1 | H1 en H3 | 83% | 55% | 82% | 64% |
| T2 | H2 en H4 | 70% | 60% | 65% | 43% |
| T3 | H5 | 100% | 90% | 82% | 78% |
| T4 | H6 en H9 | 63% | 75% | 41% | 52% |
| T5 | H8 | 68% | 53% | 75% | 55% |
| T6 | H7 | 41% | 33% | 43% | 62% |
| T7 | Werkstuk | 13% | 41% | 74% | 48% |
| T8 | H10 en H12 | 83% | 86% | 50% | 48% |
| T9 | Jaartoets | 67% | 75% | 73% | 60% |

**TABEL 2 De resultaten van de eerste klassen (2001-2002)**

*Bronnen*

*- Afstudeerscriptie, De Laptopklas 2000-2001, ICT-gebruik in de klas: een verrijking van het wiskundeonderwijs?, Onderzoek Wiskundedidactiek door C.J. Doggen en A.E. Wijnbergen.*
*- Afstudeerscriptie, De Laptopklas 2001-2002, ICT-gebruik in de klas: een verrijking van het wiskundeonderwijs?, Onderzoek Wiskundedidactiek door D.J. van de Beld en B.G. ter Veer.*
*- J. Tolboom (2002): Een digitale leeromgeving voor het vak wiskunde, nummer 1 (Tinfon, 2002).*
*- Werken aan de kwaliteit van onderwijs in de bètavakken, reeks proefschriften en bundels, nummer 6 (Rijksuniversiteit Groningen, 2002).*
*- www.math.rug.nl/didactiek/public/*
*digitaal lesmateriaal over de stelling van Pythagoras, statistiek en kansrekening.*

*Materiaal dat is ontwikkeld door studenten of medewerkers van de faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen is te verkrijgen bij Marijke de Wijs, secretaresse van de Master of Science in Education and Communication, e-mail: m.de.wijs@fwn.rug.nl*

*Betrokkenen*

*Betrokken bij de wiskunde-invulling van het laptopproject zijn:*
*David van de Beld, afstudeerder educatief ontwerpen wiskunde 2001/2002;*
*Henri Boer, wiskundeleraar van twee laptopklassen aan het Zernike College;*
*Regien Bosman, wiskundelerares van een laptopklas aan het Zernike College;*
*Neeltje Doggen, afstudeerder educatief ontwerpen wiskunde 2000/2001;*
*Donald Staal, uitgever van Moderne Wiskunde, uitgeverij Wolters-Noordhoff;*
*Anne van Streun, hoogleraar bètadidactiek Rijksuniversiteit Groningen;*
*Jos Tolboom, software-adviseur;*
*Martin Traas, leraar/onderzoeker;*
*Bart ter Veer, afstudeerder educatief ontwerpen wiskunde 2001/2002;*
*Henk de Vries, coördinator van de laptopklas;*
*Annelies Wijnbergen, afstudeerder educatief ontwerpen wiskunde 2000/2001.*

*Over de auteurs*

*- Bart ter Veer (e-mailadres: B.G.ter.Veer@wing.rug.nl) rondt op dit moment zijn studie wiskunde af aan de RuG. Zijn afstudeeronderzoek in de richting 'Educatief Ontwerpen' is inmiddels voltooid.*
*- David van de Beld (e-mailadres: D.J.van.de.Beld@wing.rug.nl) is bijna afgestudeerd bij de vakgroep wiskunde aan de RuG. Daarnaast werkt hij als docent wiskunde op het Rölingcollege in Groningen.*
*- Martin Traas (e-mailadres: m.p.traas@oprit.rug.nl) is docent op het Zernike College en heeft in het kader van Leraar in Onderzoek van het NWO twee jaar lang één dag in de week tijd besteed aan het ontwerpen van lesmateriaal en het evalueren van de resultaten. Het onderzoek heeft een vervolg gekregen dat door de school wordt bekostigd.*

# POSTPAKKET

## Een wiskundeopdracht in de eerste klas van het vmbo

[ Irene Dalm ]



### Inleiding

In de docentenkamer werd veelvuldig geklaagd over de werkhouding van derde en vierde klassers die een praktische opdracht c.q. een sectorwerkstuk moeten maken:
- Ze doen niets;
- Ze kunnen niet zelfstandig werken;
- Ze doen alles op het laatste moment;
- Ze kunnen niet samenwerken;
- Onze leerlingen kunnen dat niet;
- Dat is niets voor vmbo-leerlingen.

Het waren veelgehoorde opmerkingen. Ik denk dat je ook niet moet wachten met zulke opdrachten tot de derde en/of vierde klas. Ik probeer met leerlingen in de brugklas kleine opdrachten te doen. In dit artikel wil ik er een verder uitwerken.

### De opdracht

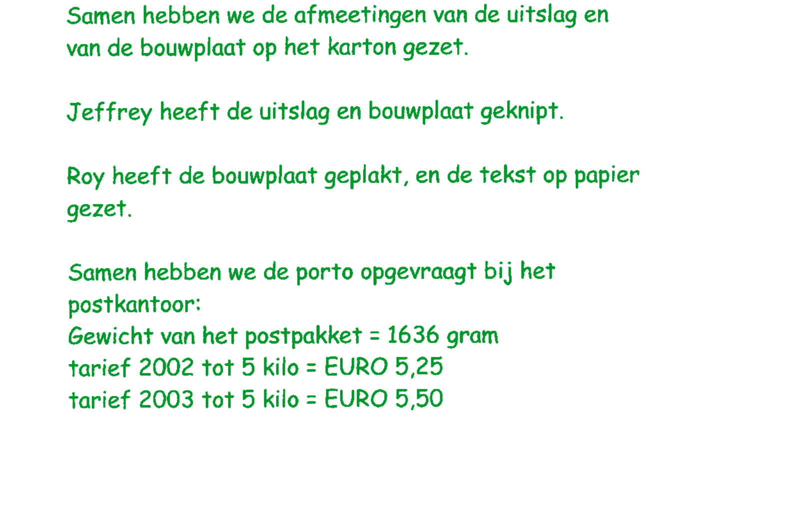
In klas 1C heb ik in november het onderwerp ruimtelijke figuren behandeld. Hieraan wilde ik een opdracht koppelen. Tijdens de lessen hadden de leerlingen al een uitslag en een bouwplaat moeten maken van een kubus met ribbe 4 centimeter. Ik heb de leerlingen de opdracht gegeven om een postpakketje te maken waarin een boek moet passen dat ze naar een vriend willen opsturen.

*Postpakket*

Je vriendin is verhuisd naar Zwolle. Je schrijft gelukkig nog wel veel met haar; meestal gaat dat via e-mail. Nu heb je voor Kerstmis een leuk boek voor haar gekocht en je wilt dit naar haar opsturen.
Hieronder staan een paar dingen waar je rekening mee moet houden als je het boek wilt versturen:
1. Het boek dat je wilt opsturen moet ongeveer even dik zijn als twee wiskundeboeken op elkaar.
2. De verpakking moet gemaakt worden van zo weinig mogelijk papier (karton).
3. Maak een bouwplaat (dit is een uitslag met plakrandje) van de verpakking en probeer een bouwplaat te maken die ‘apart’ is. Denk aan de voorbeelden die je in de les gezien hebt. *(ID: Ik heb in de les de verpakkingen laten waarin boeken van een uitgever vaak opgestuurd worden. Eis nr. 3 heb ik gesteld om de leerlingen aan het denken te zetten over het feit dat er meerdere mogelijkheden om een bouwplaat van een balk te maken.)*
4. Op de verpakking moet staan naar wie je het boek wilt opsturen.
5. Op de verpakking moet ook de afzender staan. (Dat ben je natuurlijk zelf).
6. Op de verpakking moet een klein beetje duidelijk worden wat voor soort boek erin zit.
7. Ga ook na hoeveel het kost om het pakketje op te sturen.

Lever de bouwplaat van de verpakking in zonder deze in elkaar te zetten. Je mag ook een losse bouwplaat èn een bouwplaat die in elkaar geplakt is inleveren. Je mag de opdracht met z’n tweeën maken, maar dan moet je op een blaadje schrijven wie wat gedaan heeft.
Succes.





Postpakket gemaakt door: Jeffrey en Roy

De afmeeting van twee wiskunde boeken =
lengte : 24 cm
breedte: 17 cm
hoogte: 5 cm
We zijn voor ons postpakket van de volgende maaten uitgegaan:
lengte: 25 cm
breedte: 18 cm
hoogte: 6 cm

Samen hebben we de afmeetingen van de uitslag en van de bouwplaat op het karton gezet.

Jeffrey heeft de uitslag en bouwplaat geknipt.

Roy heeft de bouwplaat geplakt, en de tekst op papier gezet.

Samen hebben we de porto opgevraagt bij het postkantoor:
Gewicht van het postpakket = 1636 gram
tarief 2002 tot 5 kilo = EURO 5,25
tarief 2003 tot 5 kilo = EURO 5,50

FIGUUR 2

FIGUUR 3

## Het werk

En dan komt de dag van inleveren. Ik werd al om 8 uur in de ochtend overstelpt met dozen, in elkaar geplakt, in elkaar gevouwen en losse bouwplaten en uitslagen in allerlei formaten (zie figuur 1).
Op vier leerlingen na hadden de leerlingen de dozen met z'n tweeën gemaakt. Er zat veel variatie in. Er was ook heel veel belangstelling voor elkaars dozen; luid en driftig werden de slechte en goede kanten van elkaars dozen bekeken.
Mooi was het werk van Jeffrey en Roy; zij hadden als enigen zowel een in elkaar geplakte doos als een uitslag gemaakt. De beschrijving van hun werkzaamheden laat zien dat zij eerst begonnen zijn met een plan van aanpak hoe zij aan de afmetingen komen van hun gemaakte doos (zie figuur 2 en figuur 3).
Ook Tom had een hele mooie bouwplaat, die op een aparte manier in elkaar gevouwen moest worden (zie figuur 4). Hij had hier dus heel goed over nagedacht; hij vertelde er wel 10 gemaakt te hebben om uit te proberen, en dat was natuurlijk de bedoeling. Maar er kwamen ook dozen op tafel te liggen waarvan je denkt: Wat moet ik daarmee?
Ruben had de avond van tevoren gewoon een schoenendoos uit zijn kast gehaald, hier met pen zijn naam opgeschreven, en dat was het dan. Hij liep er heel stoer mee te doen, zo van: Kijk mij nou, wel een doos en weinig werk aan gehad. De klas vond hem helemaal niet stoer en vonden het eigenlijk heel stom van hem. Daar had hij niet op gerekend. Ik heb hem zijn doos maar gewoon tussen alle andere dozen laten zetten en er in eerste instantie niet op gereageerd. De reactie van de medeleerlingen had hem eerst al wel genoeg aan het denken gezet. Mijn reactie zou wel komen bij de bespreking van de dozen.

## Bespreking

Belangrijk aan een opdracht is de terugkoppeling met de leerling over zijn opdracht. Ik heb de leerlingen een cijfer voor de dozen gegeven. Hoe de cijfers tot stand zijn gekomen heb ik klassikaal besproken. Niet om iemand voor schut te zetten, dit weten ze wel van mij, maar om te laten zien hoe de uitwerking van een opdracht moet.
Zo waren er twee leerlingen die samen twee hele grote dozen hadden gemaakt; ze konden niet kiezen welke ze zouden inleveren. Ik heb hierbij, bij het laten zien in de klas, verteld dat de dozen dan misschien wel goed in elkaar zaten, maar qua grootte niet aan de opdracht voldeden.
Ik heb ook uitslagen laten zien die niet klopten.
En - niet eens wiskunde maar het hoort er wel bij - het adres van de geadresseerde. 'Komt het pakketje met "*Voor Robbin*" wel aan?'
Ook de reactie van de leerlingen op elkaars doos vind ik een goede bespreking en ik geef hier dan ook de ruimte voor. Wat dacht u van de bespreking over waar je kunt informeren wat de portokosten zouden zijn. 'Bij de supermarkt?', 'Mijn moeder weet wel hoeveel het kost', 'O, kan je dat op het postkantoor vragen?'
De cijfers die tot stand zijn gekomen heb ik met de

leerlingen besproken. Ook de criteria die daarbij horen. De doos, uitslag of bouwplaat moest wel aan alle punten voldoen die ik ze opgegeven had. Ik heb alle punten ongeveer even zwaar mee laten tellen en verder ook een beetje 'met de natte vinger'. Wel moest de uitslag, bouwplaat goed in elkaar te zetten zijn, maar ook de adressering moest ongeveer op de juiste plaats staan en zo compleet mogelijk. Het moest namelijk wel echt postpakket zijn, anders had ik net zo goed alleen een uitslag van een doos kunnen laten maken.
Ik heb eigenlijk niemand een lager cijfer gegeven dan een 5, alleen Ruben kreeg een 5 voor zijn schoenendoos. De meeste leerlingen vonden dit nog een hoog cijfer voor zo'n doos. Zijn reactie hierop was: 'Als ik volgende keer bij een opdracht er meer werk van maak, krijg ik dan voor die opdracht een hoger cijfer?' Op mijn bevestigend antwoord hierop zei hij: 'Dan ga ik aan de volgende opdracht goed werken.' En dat is natuurlijk wat ik wil bereiken met zulke opdrachten. Als de leerlingen zo'n opdracht voor het eerst maken, wil ik dat zij daar van leren en er in eerste instantie plezier in houden om vaker een opdracht te willen doen.

## Conclusie

Als je leerlingen bezig ziet met zulke opdrachten heb ik het idee dat ze er veel plezier in hebben. Van ouders hoorde ik dat de leerlingen enthousiast aan het werken geweest zijn. Ook leer je de leerlingen in de brugklas hoe je een opdracht moet aanpakken, hoe je samen moet werken en waar je op moet letten. De leerlingen zijn bij het maken van deze opdracht niet zoveel problemen tegengekomen. Het grootste probleem was uiteindelijk toch de planning. Veel is er nog op de voorlaatste dag van de inleverdatum gedaan, hoewel ik regelmatig het verloop van de opdracht in de klas behandeld heb.
En als docenten zeggen dat leerlingen in de brugklas niet kunnen samenwerken, dan is het briefje van Whitney en Melinda (zie figuur 5) toch een eerste aanzet om het samenwerken te omschrijven.

**FIGUUR 4**

Melinda en Whitney: voorbeelden meegenom-
en van uitslagen
Melinda: tekenen
Whitney en Melinda: knippen
Melinda: boekmaken
Whitney en Melinda: boek plaken
Whitney en Melinda: afzender+adres schr
ijven.
Whitney: schrijven wat wie gedaan heb

**FIGUUR 5**

*Over de auteur*

*Irene Dalm (e-mailadres: idalm@ibiza-mail.com) is lerares wiskunde aan het Wellantcollege vmbo/mavo Stek te Dordrecht. Andere lesvoorbeelden van haar zijn opgenomen in 'Wiskunde en werk, werk maken van wiskunde' van het SLO.*

# POOL EN POOLLIJN

door

B. L. VAN DER WAERDEN
Zürich

In een artikel onder deze titel in Euclides **38**, p. 141 citeert *P. Wijdenes* vijf definities van het begrip ,,poollijn'', ontleend aan leerboeken, en geeft dan zelf een andere definitie.

De eerste definitie luidt: De poollijn van punt $P(x_1, y_1)$ t.o.v. de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ is de lijn $x_1x + y_1y = r^2$. Deze definitie is eenvoudig en duidelijk, maar on-meetkundig. Of de poollijn onafhankelijk is van de keus van het assenstelsel, wordt niet onderzocht. Waarom de meetkundigen zich juist voor deze lijn interesseren, blijkt niet. De heer Wijdenes heeft gelijk, dat hier aan de leerling het wezenlijke wordt onthouden.

De vier andere leerboeken geven vooreerst definities, die alleen dan gelden, als $P$ buiten de cirkel ligt. Of het geval, dat $P$ binnen of op de cirkel ligt, naderhand behoorlijk behandeld wordt, kan ik niet beoordelen. In elk geval is een algemeen geldige definitie (zoals die van het eerste leerboek) beter.

De definitie van Wijdenes luidt: De poollijn van een punt $P$ t.o. van een cirkel $C$ is de meetkundige plaats van het punt $Q$, dat op elke lijn door $P$ harmonisch toegevoegd is aan $P$ t.o. van de snijpunten van $C$ en die lijn.

Deze definitie is alleen dan juist, als $P$ binnen de cirkel ligt. Ligt $P$ erbuiten, dan is de bedoelde meetkundige plaats een lijnstuk op de poollijn.

De behandeling van Wijdenes lijkt mij voor de school te ingewikkeld. Als ik verplicht was, het begrip poollijn voor de klas te behandelen, zou ik het zo definiëren:

*Zij $P$ een punt in het vlak van de cirkel, dat niet met het middelpunt $O$ samenvalt. Bepaal op de halve lijn $OP$ een punt $Q$ zo dat het produkt $OP \cdot OQ$ gelijk $r^2$ is. De loodlijn op $OP$ in $Q$ heet poollijn van $P$.*

(...)

Het is dus mogelijk, de poollijn elementair in de klas te behandelen. Maar toch zie ik niet, waartoe dit zou moeten dienen.

De theorie van pool en poollijn is een prachtig stuk projectieve meetkunde. De lectuur van het hoofdstuk daarover in *Reye*'s ,,Geometrie der Lage'' is een genot. Maar bij een elementaire behandeling gaat de schoonheid van de theorie grotendeels teloor. De samenhang met de theorie van de volledige vierhoek en en harmonische punten kan in de klas niet behandeld worden. Het middelpunt $O$ heeft in het Euclidische vlak geen poollijn, en de rechten door $O$ hebben geen polen. Uit de elementaire theorie blijkt niet, waarom de poollijn zo belangrijk is. Ingenieurs, fysici en chemici gebruiken de poollijn vrijwel niet. Waartoe dan dit begrip op school behandelen?

*Gedeelten van een artikel in Euclides, jaargang 38 (1962-1963)*

*De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mailadres: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).*

# VAKANTIECURSUS 2002: WISKUNDE EN GEZONDHEID

[ Gert de Kleuver ]

Zo rond april komt bij mij thuis de eerste aankondiging van de Vakantiecursus via e-mail binnen[1]. In 2002 verscheen een gekleurd boekje met bovengenoemde titel. In eerste instantie dacht ik: 'Wat moet dat nu worden?' Achteraf kan ik zeggen dat het een heel goede vakantiecursus was. De sprekers lieten op prima wijze zien dat wiskunde onder andere in de geneeskunde onmisbaar is.

Het programma zag er als volgt uit:

*N. Maurits* – Een wiskundige kijk in de hersenen

*M. Keijzer* – Monte Carlo en wijnvlekken

*I. Stamhuis* – Florence Nightingale

*O. Diekmann* – Aanstekelijkheid gevangen in een getal

*S. Borovkova* – Analysis of survival data

*A. Heck* – Gewichtige wiskunde in de klas

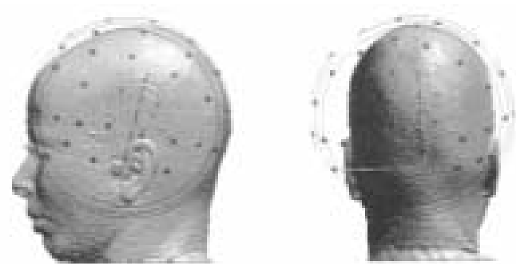
*R. Tijdeman* – Discrete tomografie

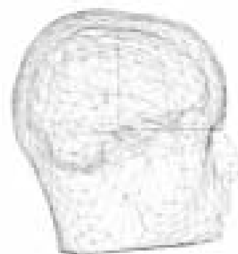
*A. Heck* – Oefeningen

Dit keer zal ik er maar één lezing uitlichten. Het is voor mij wel een moelijke keuze, want de kwaliteit was erg goed. Gelukkig publiceert ook het Nieuw Archief voor Wiskunde enkele van de lezingen[2]. Ik neem de openingslezing, 'Een wiskundige kijk in de hersenen' van dr. ir. Natasha Maurits (Academisch Ziekenhuis Groningen, afd. Neurologie). Zij behandelde wiskundige methoden en modellen die gebruikt worden bij hersenonderzoek.

Zo worden wiskundige modellen gebruikt om het EEG beter te kunnen interpreteren. Het EEG is een weergave van de elektrische hersenactiviteit die gemeten wordt door op het hoofd geplaatste elektroden. Tegenwoordig gebruikt men soms wel meer dan 100 elektroden. Vroeger werden EEG's beoordeeld door herkenning van patronen van de signalen die na versterking op papier

**FIGUUR 1** Concentrisch bolmodel van het hoofd
**FIGUUR 2** Realistisch hoofdmodel (driehoekbelegging)





verschenen. Die horen bij een bepaald ziektebeeld. Tegenwoordig is één en ander veranderd door gebruik te maken van de computer. De laatste ontwikkeling is het gebruik van bronlocatie. Op grond van het op het hoofd gemeten EEG (uitgedrukt in potentiaal-verschillen) probeert men te achterhalen waar in de hersenen de bijbehorende elektrische activiteit zich precies bevindt. Zo kun je dan bijvoorbeeld op basis van het in het EEG gemeten epileptische golfje proberen te achterhalen waar het begin van de epilepsie precies in de hersenen plaatsvindt. Als dit goed aan te wijzen is kun je dit gedeelte van de hersenen verwijderen. Bij bronlocatie moet een zogenaamd inversieprobleem worden opgelost:

$$V^i = \sum_{j=1}^{m} H^{ij} V^j + g^i \quad met$$

$$g_k^i = \frac{1}{\mu_k^i} \frac{2}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \int_{\Delta_k^i} V_0(r') \, \mathrm{d}S_i' \quad en$$

$$H_{kl}^{ij} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sigma_j^- - \sigma_j^+}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \right] \frac{1}{\mu_k^i} \int_{\Delta_k^i} \Omega_{\Delta_l^j}(r') \, \mathrm{d}S_i'$$

**FIGUUR 3 Poisson-vergelijking**

gegeven een elektrische potentiaalverdeling op het hoofd, waar liggen dan de veroorzakende bronnen in de hersenen? In de samenvatting van haar lezing worden bijbehorende berekeningen van onder andere het oplossen van een Poisson-vergelijking verder uitgewerkt (zie figuur 3).

Mevrouw Maurits liet ook via een prachtig voorbeeld zien hoe men een model verder ontwikkelt. Het was nodig om een zo goed mogelijk passend model van een hoofd te maken. Het bleek dat de vorm van een hoofd heel goed te volgen is met driehoekjes. De computers van tegenwoordig beschikken over zoveel rekencapaciteit dat zo'n driehoeksbelegging een realistisch model voor een hoofd oplevert. Dit model is nuttig omdat nu de potentiaal op het hoofd uitgedrukt kan worden in een zogenaamde integraalvergelijking op de grensvlakken.
Na de uitwerking van bovengenoemd model werd een voorbeeld aangehaald uit de praktijk hoe men de juiste positie van een tumor in een hoofd van een patiënt kon bepalen. Bij het verwijderen van de tumor werd de omgeving zoveel mogelijk ontzien. De patiënt heeft na de operatie slechts een lichte tinteling in de vingers van de rechterhand overgehouden. Vroeger kon het gebeuren dat er verlammingsverschijnselen optraden.

Hopelijk zal het programma van 2003 dat van 2002 evenaren, en zullen velen zich voor de Vakantiecursus 2003 aanmelden[3].

*Noten*

*[1] De 'Vakantiecursus Wiskunde voor leraren exacte vakken in vwo, havo en hbo en andere belangstellenden' is een initiatief van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. De cursus wordt sinds 1946 jaarlijks gegeven op het Centrum voor Wiskunde en Informatica in Amsterdam en aan de Technische Universiteit Eindhoven.*
*[2] In het Nieuw Archief voor Wiskunde zijn inmiddels verschenen:*
*- Svetlana Borovkova: Analysis of survival data, in NAW 5/3, nr. 4 (december 2002);*
*- Odo Diekmann: Aanstekelijkheid gevangen in een getal, in NAW 5/4, nr. 1 (maart 2003).*
*[3] De Vakantiecursus 2003 heeft als werktitel: 'Wiskunde in het moderne/dagelijks leven'.*
*De data zijn (onder voorbehoud):*
*22 en 23 augustus 2003 (CWI Amsterdam),*
*29 en 30 augustus 2003 (TU Eindhoven).*
*Zie voor nadere informatie, programma en aanmelding:*
*www.cwi.nl/events/2003/VC2003/programma.html*

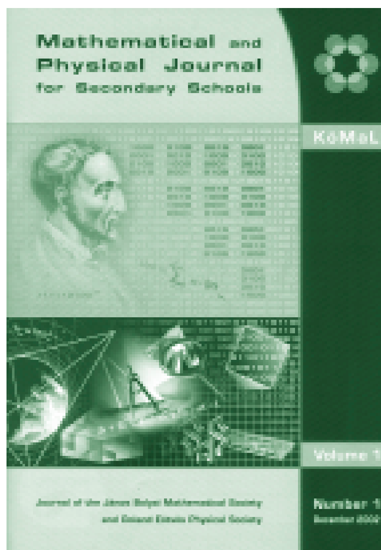
*Over de auteur*

*Gert de Kleuver (e-mailadres: g.de.kleuver@wanadoo.nl) is docent aan het Ichthus College te Veenendaal.*

# Verschenen / KöMaL – Mathematical and Physical Journal for Secondary Schools (Vol. 1, Nr. 1)

**Uitgever: Roland Eötvös Physical Society, Budapest (Hongarije) ISSN 1215-9247 Prijs: $ 8,00**

**[ Dick Klingens ]**




Meer dan 100 jaar geleden besloot Dániel Arany, leraar aan een middelbare school in Győr (Hongarije), tot de uitgave van een wiskundig tijdschrift voor middelbare scholieren. Zijn doel was 'aan leerlingen en leraren een macht aan voorbeelden te geven'. De eerste aflevering verscheen op 1 januari 1894.

In december 2002 verscheen de eerste volledig Engelstalige uitgave van het tijdschrijft KöMaL (Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok). Tot dan waren in het tijdschrift ook wel Engelse vertalingen van wiskundige en natuurkundige artikelen en vraagstukken opgenomen. Maar nu is het echt mogelijk een ruimer publiek te laten kennismaken met wat in Hongarije aan leerlingen en leraren wordt voorgelegd. In tegenstelling tot de Hongaarse uitgave, die negen keer per jaar (met 64 pagina's per nummer) het licht ziet, verschijnt de Engelse editie slechts twee keer per jaar.

Het tijdschrift is vooral gewijd aan de verschillende 'Problem Solving Competitions', onderscheiden in:
- wiskunde C wedstrijd; speciaal voor leerlingen die een opleiding zonder specifieke wiskunde volgen;
- wiskunde B wedstrijd; voor hen die voortgezette wiskunde in hun pakket hebben;
- wiskunde A wedstrijd; telkens drie problemen die meer wiskunde vragen dan de B-vraagstukken;
- natuurkunde; onderverdeeld in experimentele (M) en theoretische (P) problemen;
- informatica; elke maand worden er drie programmeerproblemen (I) voorgelegd.

Uit elke wiskundecompetitie laten we hieronder een voorbeeld volgen uit Volume 1, number 1.

**C. 692.** For the real numbers $x$, $y$, $z$,
(1) $x+2y+4z \geq 3$ and
(2) $y-3x+2z \geq 5$.
Prove that $y-x+2z \geq 3$.

**B. 3583.** The incentre of a triangle $ABC$ is connected to the vertices. One of the resulting triangles is similar to the original triangle $ABC$. Find the angles of the triangle $ABC$.

**A. 304.** Find all functions $R^+ \mapsto R^+$, such that
$f(x+y)+f(x)\cdot f(y)=f(xy)+f(x)+f(y)$

En voorts nog twee eerder verschenen opgaven uit de beide andere competities.

**P. 3432.** Identical metal spheres are placed into the vertices of a regular tetrahedron. The spheres do not touch. When a single sphere ($A$) is given a charge of 20 nC it reaches the same potential as when $A$ and another sphere are given 15 nC each. What equal charge should be given to $A$ and the two other spheres, and what equal charge to all four spheres so that the potential of sphere $A$ is always the same?

**I. 34.** Binomial coefficients can be used to represent natural numbers in the so-called *binomial base*. For a fixed $m$ ($2 \leq m \leq 50$) every natural number $n$ ($0 \leq n \leq 10000$) can uniquely be represented as

$$n=\binom{a_1}{1}+\binom{a_2}{2}+\ldots+\binom{a_m}{m}$$

where $0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_m$.
Your program (I34.pas, ...) should read the numbers $n$ and $m$, then display the corresponding sequence $a_1$, $a_2$, ..., $a_m$.
Example. Let $n=41$, then $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=7$, because

$$41=\binom{1}{1}+\binom{2}{2}+\binom{4}{3}+\binom{7}{4}= 1+1+4+35.$$

In het eerste nummer zijn ook enkele artikelen opgenomen. We noemen:

- On János Bolyai's Bicentennial (door Elemér Kiss); een korte beschrijving van het leven van János Bolyai (1802-1860) en van enkele van diens wetenschappelijke manuscripten;
- Cardan and cryptography - the mathematics of encryption grids (door Tamás Dénes); over de bijdrage van Girolamo Cardano (1501-1576) aan de cryptografie (geschreven ter gelegenheid van de 500ste geboortedag van Cardano);
- Poncelet's theorem (door András Hraskó); een duidelijke en niet al te moeilijke uiteenzetting over de bekende Sluitingsstelling van Poncelet (1788-1867).

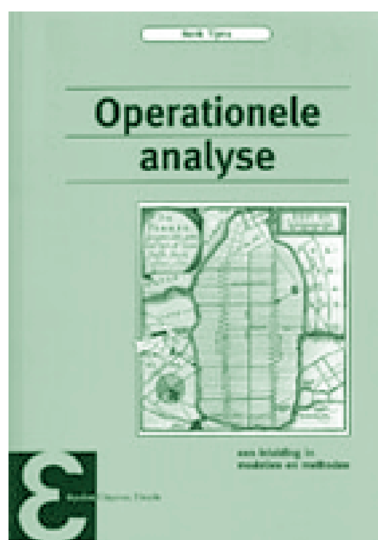
**Informatie**

Verdere informatie kan gevonden worden op de website van het tijdschrift (*www.komal.hu*).
Een groot deel van het eerste nummer van KöMaL is daarop electronisch te vinden; en natuurlijk een bestelformulier voor de papieren versie (*https://www.komal.hu/megrendelolap/megrendelolap.e.cgi*).

# Boekbespreking / Operationele Analyse, een inleiding in modellen en methoden

**Auteur: Henk Tijms Uitgever: Epsilon Uitgaven (dl 54), Utrecht (2002) 496 pagina´s ISBN 90-5041-075-8 Prijs: €34,-**

**[ Jan van de Craats ]**




Operations research (OR), Besliskunde, of, zoals het hier genoemd wordt, Operationele analyse, is een verzamelnaam voor allerlei takken van wiskunde en statistiek die vooral in de economie en de bedrijfskunde worden toegepast. Na de Tweede Wereldoorlog heeft het vak een grote vlucht genomen, mede dankzij de opkomst van de computer. De lijst van titels van de hoofdstukken in dit boek geeft een goede indruk: Lineaire programmering, Geheeltallige programmering, Netwerkanalyse, Beslissingsbomen, Dynamische programmering, Voorraadbeheer, Discrete-tijds Markov ketens, Continue-tijds Markov ketens, Wachttijdtheorie, Simulatie.
In zijn Voorwoord geeft Tijms zijn boek het motto: 'eerst inzicht, dan de wiskunde'. Hij legt het accent op het opstellen van modellen en het interpreteren van de oplossingen in de context van concrete toepassingen.
Het boek is gericht op universitair onderwijs en hbo. Deze lijvige tekst van bijna 500 bladzijden maakt zijn belofte meer dan waar: het is een goede Nederlandstalige inleiding in de OR. Eigenlijk gaat het boek veel verder dan wat meestal onder een 'inleiding' wordt verstaan: de behandeling van de verschillende onderwerpen is uitgebreid, en veel details die in andere inleidende teksten worden overgeslagen, komen hier wel aan de orde. De verhalende schrijfstijl van Tijms, waarin ook veel over praktische toepassingen wordt verteld, maakt het mogelijk van elk deelonderwerp een globale indruk te krijgen door het desbetreffende hoofdstuk eerst vluchtig door te lezen. De wiskundige details worden bekwaam en met een gepaste mate van volledigheid behandeld, en een zeer uitgebreide vraagstukkenverzameling maakt het boek als onderwijstekst aantrekkelijk. Voor docenten zijn uitwerkingen van de opgaven bij de auteur op te vragen, en daarnaast kan geschikte software opgehaald worden op de website van de auteur (*http://staff.feweb.vu.nl/tijms/*).
Dit is een prima boek dat hopelijk op grote schaal gebruikt zal gaan worden!

*Over de recensent*

*Prof.dr. Jan van de Craats (J.vd.Craats@mindef.nl) is hoogleraar wiskunde aan de Koninklijke Militaire Academie, de Universiteit van Amsterdam en de Open Universiteit.*

V.l.n.r.
Henri Huizenaar,
Lia van Asselt,
Frank Twil
(faculteitsdirecteur
Toegepaste Wiskunde)



# SAMENWERKING VWO-SCHOLEN EN TECHNISCHE UNIVERSITEITEN MOET STRUCTUREEL

## Interview met Lia van Asselt

[ Hans Daale ]

## Aansluiting en toelating

De recente plannen om de tweede fase van het havo en vwo te gaan aanpassen hebben veel losgemaakt. Logisch, want de beoogde veranderingen lossen aan de ene kant een aantal problemen op, maar zullen naar de mening van deskundigen op het bètagebied aan de andere kant weer voor danig veel beroering gaan zorgen. Wat betreft dat laatste worden er vanuit het voortgezet onderwijs beschuldigende vingers uitgestoken naar die 'andere kant', namelijk het hbo en wo. Kennelijk is het toelatingsbeleid van hogescholen en universiteiten (met het steeds verder oprekken van de toelatingseisen om de drempel zo laag mogelijk te kunnen houden) een van de redenen van het ministerie om minder dan voorheen de exacte invalshoek dwingend in de profielen op te nemen. De omstandigheid dat zonder een goed geprepareerde aanloop de meetlat achter die drempel vervolgens voor veel studenten erg hoog komt te liggen, lijkt nu uit te monden in iets dat het vervolgonderwijs zelf maar moet oplossen.

## Klankbord

'De verwijten over en weer zijn onterecht, in ieder geval wat betreft de Universiteit Twente (UT)', geeft Lia van Asselt aan. Als wiskundedocente in de bovenbouw van het vwo bij het Bonhoeffer College te Enschede was en is ze nadrukkelijk betrokken bij de aansluiting richting het hoger onderwijs. Al jaren is de afdeling Toegepaste Wiskunde van de UT in gesprek met vwo-docenten wiskunde uit de regio. 'Een klankbordgroep met de naam "Echogroep", bestaande uit vijf vwo- en drie universitaire docenten, komt een aantal keren per jaar bij elkaar. Wij praten dan de universitaire docenten bij over de nieuwe ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs. Je moet dan denken aan mogelijkheden die er zijn binnen de samenwerking met de UT, zoals bij de praktische opdrachten en het profielwerkstuk.'

Maar er gebeurt natuurlijk meer. 'Uiteraard; zo is een ander aandachtspunt het samen voorbereiden van een jaarlijkse studiemiddag voor alle wiskundedocenten uit onze Twentse regio. Zo'n bijeenkomst is absoluut zinvol, met als vast programmapunt een lezing van een universitaire docent, overigens niet noodzakelijk uit de wiskundehoek zelf, over een interessant stuk wiskunde in het curriculum van de UT.'

## Detachering

Vanuit die contacten heeft de UT in 2000-2001 het initiatief genomen om twee docenten vanuit het vwo – naast Lia van Asselt gaat het om Henri Ruizenaar van het Stedelijk Lyceum in Enschede – op detacheringsbasis te betrekken bij de opvang van de eerste lichting tweede fase-studenten in een aantal technische richtingen.

'Die actie van de UT viel erg goed bij ons in de regio, want het lijkt toch al gauw of men bij universiteiten vanuit een ivoren toren bezig is', geeft Lia aan. 'Het was van groot belang dat de universiteit op tijd onderkende dat er een ander soort student binnenkomt. Niet dommer, maar gewoon anders. Je moet je toch niet voorstellen dat die groep verloren gaat voor de technische wetenschappen, omdat tentamens en projecten in de propedeuse niet aansluiten op wat ze bij ons in het vo gewend zijn. De UT heeft die verantwoordelijkheid gezien en genomen, vandaar dus onze entree als docent en begeleider van die nieuwe studenten.'

Het is duidelijk te zien dat Lia haar taak uitermate serieus neemt. Haar werkkamer ligt vol met materiaal voor de UT-studenten, maar ook met stukken voor UT-docenten die zij informeert over de veranderingen in het vwo. 'Natuurlijk, ze hebben wel kennis genomen van hetgeen er zoal is veranderd en de exameneisen doorgelezen, maar daarmee ben je er nog niet. Vóórdat je als docent bij een universiteit doorhebt welke zaken juist niet meer mogen worden gevraagd van vwo-leerlingen, ben je vaak een tijdje bezig met je af te vragen of het nu aan die studenten ligt of aan hun vooropleiding. Of juist aan de eigen aanpak, die dus aanpassingen behoeft.'

Om dat laatste te bereiken, zijn Lia en haar collega Henri nadrukkelijk betrokken bij het opzetten van de werkcolleges en het ontwerpen van de tentamens. Dat ze daarmee de juiste insteek hadden gekozen, bleek wel toen ze eerst maar eens in de dictaten doken. 'Je kon wel zien dat de veranderingen nog niet waren doorgedrongen, gelet ook op het feit dat bepaalde onderwerpen alsnog in het vwo zijn geschrapt. En als het dan om zaken gaat waarvan men vanuit hun positie mogelijk gewoon verwacht dat ze zijn behandeld, dan leidt dat wellicht tot een bepaald onbegrip bij de universiteit: wat is er nou allemaal aan de hand?'

## Taak en activiteiten

De werkzaamheden zijn in goed overleg op basis van een taakomschrijving (zie kader op volgende pagina) ingebed in de opzet bij de UT. 'Onze taken vormen een juweeltje van wat je van goede aansluiting verwacht. Vooral het geven van werkcolleges aan technische en wiskundestudenten in de eerste twee trimesters is het ei van Columbus. Door zelf te ervaren wat er van de binnenkomende student wordt verwacht, kun je exact de vinger op de zere plek leggen wat betreft de aansluiting van het hoger onderwijs op het voortgezet onderwijs.'

Maar naast de werkcolleges aan de 'zelf opgeleide' vwo'ers in een andere context, stonden er nog veel meer activiteiten op het drukke programma. 'De eerste actie na de zomervakantie in 2001 was een bijeenkomst met de universitaire docenten waarbij we de vwo-B-examens van de eerste lichting tweede fase-studenten, overigens nog maar twintig procent van de instroom, hebben doorgespit. Vooral zo'n punt als het gebruik van de GR kwam uiteraard uitvoerig aan de orde'.

Gelukkig werd ook de eerste serie wiskundetentamens vóór de afname aan Lia en Henri voorgelegd, om ze goed te screenen. 'Ze moesten immers ook maakbaar

**Taakomschrijving samenwerking vwo-wo**

1. Geven van een aantal werkcolleges op het gebied van Calculus en elementaire Lineaire Algebra in de eerste twee trimesters.
2. Verzorgen van de 'deficiëntiecursus' WB1 - WB12.
3. Analyseren van mogelijke aansluitproblemen tussen de wiskundeprogramma's vwo - UT, in het bijzonder met betrekking tot het gebruikte studiemateriaal en de stijl waarin het onderwijs wordt aangeboden.
4. Adviseren van de opleidingsdirecteur over de consequenties van de nieuwe vwo-wiskundeprogramma's voor het wiskundeonderwijs aan de UT.

zijn voor de tweede fase-student. Door simpelweg hier en daar de vraag op een andere manier te stellen, dus meer zoals ze gewend waren op het vwo, hebben we een zinvolle bijdrage kunnen leveren.'

### Analyse

De resultaten van die eerste TU-tentamens werden vervolgens in overleg met beide vwo-docenten geanalyseerd. 'We hebben zorgvuldig gekeken welke items slecht scoorden. In algebraïsche vaardigheden bleken de nieuwe studenten toch wel slechter te scoren dan degenen die nog volgens het oude programma waren opgeleid. En daar baalden zijzelf nog het meeste van. Ter geruststelling: met het practicum modelleren dat in groepsverband werd gedaan, hadden onze studiehuisstudenten juist veel minder moeite.'
En wat betreft het nieuwe materiaal, want in de tweede fase zijn de boeken en andere zaken toch ook anders vormgegeven? 'Dat hebben we zeker niet over het hoofd gezien. Zo zijn we bijvoorbeeld uitvoerig geraadpleegd bij het uitzoeken van nieuw studiemateriaal voor het vak Calculus. Want je moet de zaak wel compleet aanpakken.'

### Tweede jaar

Gelukkig konden Lia en haar collega dit studiejaar opnieuw bij de UT aan de slag om de opgedane ervaringen in te zetten voor een volgende ronde met activiteiten voor de nieuwe instroom.
Samenwerkingsprojecten lopen nog wel eens stuk op de beperkte looptijd en het wisselen van mensen. 'De UT heeft dit juist goed aangepakt. Maar we zijn gewoon weer begonnen met een bijeenkomst waarin we gedetailleerd de vwo-examens hebben doorgelicht met de UT-docenten. Belangrijk was echter dat we nu zelf voorstellen konden indienen voor de tentamens in die vakken waarin we het werkcollege hadden gegeven. Samen met de verantwoordelijke coördinator voor het vak hebben we vervolgens de definitieve tentamens vastgesteld. Nu ook de resultaten van de hertentamens binnen zijn, ligt er nog een interessante klus op ons te wachten: een analyse maken op onderdelen zodat er volgend jaar weer minder knelpunten in de aansluiting zitten.'
Natuurlijk komt niet iedere student met de juiste vakken binnen. Op zichzelf hoeft dat niet erg te zijn, maar het kost wel extra werk in de propedeuse. Hoe zit dat bij de UT? 'Er is dit jaar veel tijd gaan zitten in het verzorgen van een cursus met onderwerpen uit wiskunde-B2, want maar liefst één op de vijf studenten heeft dat vak niet gevolgd. Dat tekort aan wiskunde-kennis, want zo ziet de UT het toch wel, wordt op die wijze bijgewerkt. Dat blijkt terecht, want ook in een enquête bij de afsluiting van de cursus gaven de meeste studenten aan de eis van wiskunde-B2 voor hun studie zeker relevant te vinden.'

### Waarschuwingen richting het WO

Lia geeft een paar voorbeelden van waarschuwingen zoals ze die heeft afgegeven in haar contacten binnen de universiteit. 'Zo heb ik verteld dat de student nauwelijks meer ruimtemeetkunde heeft gehad. En veel zaken zoals de vergelijking van een vlak, de normaal-vector, de hoek tussen twee lijnen, ..., allemaal verdwenen. Functies met twee variabelen worden ook niet meer behandeld. Dus als een wo-docent ter voorbereiding van het bepalen van extreme waarden met de methode van Lagrange wil teruggrijpen naar driedimensionale plaatjes met bijbehorende functie-voorschriften, roept hij meer nieuwe problemen op dan hij verduidelijkt. Het is dan goed voor de docenten van de UT om te weten dat er meer tijd voor de introductie

van dit onderwerp moet worden uitgetrokken.'
Lia en haar collega hebben dus steeds aangegeven bij iedereen die maar wilde luisteren binnen de UT, dat bepaalde onderwerpen op het vwo wel aan de orde komen, maar dan soms erg summier. Ze kan talloze voorbeelden noemen hoe daarmee eerder op de UT werd omgegaan en hoe men daar nu op inspeelt. 'Misschien is het een goed idee dat Henri en ik voor de collega's in het land een workshop verzorgen op de landelijke studiedagen van de Vereniging. Ikzelf heb het tenminste razend interessant gevonden om te ervaren op welke wijze de zaken die wij onze leerlingen aanleren, terugkomen op zo'n technische universiteit. Het is niet niks wat zij daar voor hun kiezen krijgen!'

## Zinvol

De vraag is of het allemaal heeft geholpen. Is het al de moeite waard geweest, ook nog als het gaat om de toekomstige aanpak? Wat Lia betreft wel degelijk, 'omdat alleen in een goede structurele samenwerking boven water kan worden gehaald wat echt nodig is in het vwo om leerlingen goed op een technische studie voor te bereiden en wat vervolgens moet worden gedaan in het hoger onderwijs om daarop in te spelen.'
Op de vraag of ze nu ook anders met haar vak omgaat, op basis van de ervaringen die ze bij de UT opdoet, geeft Lia aan dat ze nu nog meer dan vroeger doordrongen is van het belang om een duidelijke leersituatie te scheppen die een afspiegeling is van hetgeen ze later kunnen verwachten. 'Je moet dus vooral lesstof gebruiken waarin de benodigde basiskennis voor technische studies aan de orde komt. Ook is het handig om vwo'ers te laten werken met een studieplanner, om ze nu al te laten ondervinden dat discipline binnen een wo-studie van groot belang is. Ik hoop leerlingen te overtuigen van het feit dat ze niet achterop kunnen raken door steeds te werken op basis van een goede planning. Op de UT is er niemand die je nog helpt met stof die een paar weken eerder aan bod is geweest. Zo gaven eerstejaarsstudenten in een van onze enquêtes aan dat hun falen bij het eerste wiskundetentamen domweg lag aan het feit dat ze gelijk door de eerste twee weken kalm aan te doen, een achterstand hadden opgelopen die ze niet meer konden overbruggen.'
Is het dan nu echt allemaal koek en ei? In het geval van Twente duidelijk wel, want daar gaat het via de inbreng van beide vwo-docenten de goede kant op. 'Maar we moeten toch voortdurend blijven zoeken naar vormen van samenwerking tussen vwo-scholen en universiteiten, om de eigen leerlingen duidelijk te maken wat een studiehuis nu eenmaal naast alle vaardigheden ook is: een plek om kennis te verwerven om de slaagkans te vergroten. Want het is natuurlijk helemaal niet leuk om als eerstejaars student bij een eerste tentamen te merken dat je bepaalde, direct in te moeten zetten wiskundekennis gewoon niet beheerst. In dat gewaarwordingsproces speelt ook de vwo-docent een rol, zonder meer.'

## Bedrijfskunde

Om niet alleen in de puur technische opleidingshoek te kijken naar de wijze waarop bij de UT met de nieuwe instroom wordt omgegaan, geeft Lia dit jaar ook les aan studenten die de opleiding Bedrijfskunde volgen. 'Je krijgt daar te maken met het toepassen van wiskunde in een bedrijfsmatige situatie. Het zijn dan ook duidelijk andere studenten, met een andere studiehouding. Ze verlaten zich in het vwo bijvoorbeeld teveel op het gebruik van de formulekaart en de grafische rekenmachine, waardoor ze toch niet altijd meegekregen hebben wat er achter een bepaalde aanpak steekt. Dat bijvoorbeeld de formule voor de marginale exploitatiekosten is ontstaan uit de afgeleide van de totale exploitatiekosten, realiseren ze zich niet meer. Je vraagt naar de optimale bestelgrootte, brengt vervolgens een kleine wijziging in de randvoorwaarden aan, hetgeen niet ondenkbaar is in het economisch verkeer, dacht ik zo, en ze blijken niet in staat de oorspronkelijke functie, die de totale exploitatiekosten voorstelt, op te stellen. De essentie is dus niet begrepen.'
Is dat dan weer iets dat je meeneemt naar je eigen school en daar 'van de schooldaken roept'? Lia is wat dat betreft voorzichtig ingesteld, want je moet natuurlijk niet meteen bepaalde ervaringen tot de algemene gang van zaken transformeren. 'Het helpt mij natuurlijk heel direct als ik bezig ben met zoiets als het ontwerpen van praktische opdrachten.' Het materiaal op Lia's bureau vormt het zichtbare bewijs. 'Wat dat betreft zul je voortdurend moeten kijken naar succesfactoren in het vervolgonderwijs, en die meenemen in je eigen lessen. Misschien dat ik daardoor wel eens erg veel eis van mijn leerlingen, maar ik heb tevens het idee dat ze zo'n aanpak waarderen. Kijken naar de eisen die worden gesteld bij hun toekomstige studie, samen met de docent, vinden ze best wel van belang.'

## Bevindingen

Uiteraard is er ook bij de UT onderzoek gedaan onder de tweede fase-studenten naar hun ervaringen. Een paar opvallende bevindingen:
- de helft vond dat de stof slecht aansloot op hun voorkennis;
- ze geven zelf aan algebraïsche vaardigheden te missen;
- ze merken dat ze nu ook vragen over de theorie krijgen;
- ze vinden de wiskunde ineens veel abstracter, met allerlei regeltjes die niet of nauwelijks aan de orde waren geweest.

Als het gaat om aanbevelingen in de richting van de – technische – universiteiten, denkt Lia dat 'je het studiemateriaal zodanig moet vormgeven dat je vanuit een concrete aanpak richting de abstractie gaat. Als je alleen al kijkt naar het taalgebruik en de wijze waarop men met notaties omgaat, dan zie je een duidelijke kloof tussen het vwo en wo. Ook moet je aangeven wat het nut van bepaalde lesstof is, want ze vragen toch om een bepaalde context, om een beeld te krijgen van

de toepasbaarheid. En domweg trainen in algebraïsche vaardigheden, vanaf het begin, ondanks alles. De grafische rekenmachine is daarbij echter wel een gegeven, dus moet je als docent in het wetenschappelijk onderwijs opnieuw aan de slag met het herontwerpen en herformuleren van jouw tentamenopgaven…'

## Instroom

Toch ook nog even kijken naar de ontwikkeling als het gaat om het aantal studenten dat wiskunde gaat studeren. Het is duidelijk dat technische universiteiten sowieso te kampen hebben met te weinig belangstelling voor hun technische opleidingen, maar ook dat het aantal studenten wiskunde dramatisch terugloopt. 'Dat klopt en dat is erg jammer en vervelend. Natuurlijk kun je zoals de UT er alles aan doen om de studie wiskunde goed neer te zetten – en dat bleek ook wel bij de visitatie, waar de opleiding Toegepaste Wiskunde van de UT landelijk gezien het hoogste scoorde – maar financieel gezien houd je het niet lang vol met kleine groepen. Men is dan ook bezig om bepaalde richtingen te gaan samenvoegen, om een en ander betaalbaar te houden. Je kunt je dan vervolgens afvragen of dat het begin van het eind van de pure wiskundestudie is. Het is zeker iets dat we met z'n allen in de gaten dienen te houden, tot behoud van het wiskunde-vakgebied.'

## Wensen

Terugkijkend op de afgelopen periode, als combinatiedocent bij haar eigen vwo-school en de UT, wat zijn dan Lia's wensen als het gaat om de samenwerking tussen het voortgezet en het universitaire onderwijs? 'In ieder geval in elkaars keuken blijven kijken. Eigenlijk is dat een must voor elke docent die in de tweede fase zit en voor degenen die de propedeuse verzorgen bij de universiteit. Kijk, ik realiseer me dat Henri en ik in een bijzondere situatie verkeren omdat er een subsidiepotje is om ons in te zetten, maar eigenlijk moet bij elke propedeuse-studie iemand betrokken zijn die permanent kan aangeven wat men mag verwachten van hun vwo-instroom. En omgekeerd natuurlijk.'
Maar als men nu de voorgenomen plannen doorvoert, is alles dan niet voor niets geweest? Moet je dan weer opnieuw beginnen? 'Nee, juist daarom moet je naar die structurele samenwerking toe, want als er toch veranderingen zullen worden doorgevoerd, dan ken je elkaar goed genoeg om over en weer te accepteren wat noodzakelijk is om een goede doorlopende studie van vwo naar wo te krijgen en te behouden.'
Blijvend werk aan de winkel dus? 'Ja, volgens mij wel, al was het maar om mee te werken aan het vormgeven van een vernieuwde propedeuse voor de technische studies[1], op basis van hetgeen in het vwo al dan niet aan de orde komt en toch ook vanwege de vraag vanuit de UT naar bepaalde basiskennis en bijbehorende wiskundige vaardigheden. Het gaat dus nadrukkelijk niet alleen om een soort 'deficiëntietraject', maar om het scheppen van een leeromgeving waarin op een goede wijze de omslag van vwo naar wo kan plaatsvinden. En als daarbij nog iemand uit de vertrouwde vwo-omgeving aanwezig is, waarom dan niet…?'

**'In ieder geval in elkaars keuken blijven kijken'**

*Noot*

*[1] Als u vragen heeft over de verdere opzet van de samenwerking vwo-wo in de regio Twente, dan kunt u mailen naar Lia van Asselt (e-mailadres: r.v.asselt@wxs.nl).*

*Over de auteur*

*Interviewer Hans Daale (e-mailadres: dae@hesasd.nl) is redacteur van Euclides en werkzaam in het hoger economisch onderwijs (heo).*

# WISKUNDE IN VAZEN

# Verdeling van Fermi-Dirac

[ Rob Bosch ]


**E. Fermi**
**1901-1954**


**P. Dirac**
**1902-1984**

Op hoeveel manieren kunnen we vier ballen over vijf vazen verdelen? Wel, voor iedere bal hebben we vijf mogelijkheden en derhalve is het totaal aantal mogelijkheden is gelijk aan $5^4 = 625$.
Bij genummerde vazen en gekleurde ballen is het bovenstaande antwoord inderdaad het juiste. Maar als we vier pingpongballetjes over de vazen verdelen wordt het wat lastiger. De balletjes zijn nu namelijk niet meer te onderscheiden. Hoeveel mogelijkheden zijn er nu?

Iedere verdeling van de vier ballen over de vijf vazen A t/m E kunnen we voorstellen door een rijtje van 4 ballen en 4 scheidingstekens. Zo stellen de rijtjes

0 | 0 | 0 | | 0

| 0 | | 0 0 0 |

| | 0 0 | | 0 0

respectievelijk de volgende verdelingen voor:
- 1 bal in vaas A, B, C en E en 0 ballen in vaas D;
- 1 bal in vaas B, 3 ballen in vaas D en 0 ballen in vaas A, C en E;
- 2 ballen in vaas C en E, en 0 ballen in vaas A, B en D.

Het aantal mogelijke verdelingen is nu gelijk aan het plaatsen van 4 scheidingstekens in een rijtje van 8 symbolen.

Dit kan uiteraard op $\binom{8}{4}$ manieren.

Het aantal verdelingen is hier dus gelijk aan 70, aanzienlijk minder dan de 625 mogelijkheden van de eerste verdeling.

Als we als extra eis stellen dat geen enkele vaas meer dan één bal mag bevatten, wordt het aantal mogelijkheden uiteraard nog verder beperkt. In dit geval hoeven we slechts vier vazen aan te wijzen waarin we een balletje stoppen.

Dit kan op $\binom{5}{4}$ manieren.

Er blijven nu nog maar 5 mogelijkheden over.
De kans op een bepaalde verdeling van de balletjes hangt af van het gekozen kansmodel. Als we aannemen dat bij de bovenstaande verdelingen van de balletjes alle mogelijkheden even waarschijnlijk zijn, dan vinden we voor de verdeling 0 | | 0 0 0 een kans van respectievelijk $\frac{24}{625}$, $\frac{1}{70}$ en $\frac{1}{5}$.


**L. Boltzmann**
**1844-1906**

In de statistische mechanica verdeelt men de faseruimte in een groot aantal kleine cellen om vervolgens ieder deeltje aan een van die cellen toe te kennen. De toestand van het systeem wordt dan volledig bepaald door de kansverdeling van de deeltjes over de cellen. Dit komt overeen met onze verdeling van ballen (deeltjes) over vazen (cellen). Ons eerste model staat bekend als de *Maxwell-Boltzmann* verdeling. Het model met de niet te onderscheiden balletjes heet de *Bose-Einstein* verdeling. De extra eis van maximaal één bal per vaas levert de *Fermi-Dirac* verdeling op. De Bose-Einstein verdeling geldt voor bijvoorbeeld fotonen. Elektronen en protonen voldoen aan de Fermi-Dirac verdeling. Er zijn geen deeltjes bekend die de Maxwell-Boltzman verdeling volgen.


**J. Maxwell**
**1831-1879**

*Literatuur*

*Norman L. Johson, Samuel Kotz: Urn Models and their Application, John Wiley & Sons Ltd., New York (1977).*

*Over de auteur*

*Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is na zijn doctoraal wiskunde 13 jaar werkzaam geweest als wiskundeleraar in het middelbaar onderwijs. Sinds 1987 is hij als docent verbonden aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda. Zijn belangstelling gaat o.a. uit naar de sociale keuzetheorie, op welk gebied hij aan de Katholieke Universiteit Brabant onderzoek verricht.*


**S. Bose**
**1894-1974**


**A. Einstein**
**1879-1955**

# FINANCIËLE REKENKUNDE VOOR WISKUNDIGEN

**In de wiskunde voor het profiel E&M krijgen wiskundedocenten rechtstreeks te maken met economische contexten. Daarmee voelen zij zich niet automatisch vertrouwd. Enige achtergrondinformatie kan interessant zijn.**

[ Wim Pijls ]

## Inleiding

Binnen de Bedrijfseconomische wetenschappen is het vak Financiële Rekenkunde naast Boekhouden het meest klassieke onderdeel. Ofschoon dit vak eigenlijk een puur wiskundig karakter heeft, besteedt de wiskundige literatuur er weinig aandacht aan. De behandeling in de economische literatuur is echter vaak omslachtig of zelfs onvolledig. De belangrijkste onderwerpen uit de financiële rekenkunde worden hier voor een wiskundig publiek uiteengezet. Aan het einde wordt daar nog een didactische noot aan toegevoegd.

## Een algemene formule

Stel een kapitaal $K_0$ staat een jaar uit tegen een rente $r$, waarbij $r$ een fractie ('*perunage*') is, bijvoorbeeld $r = 0{,}04$. Behalve het jaarlijkse bijschrijven van de rente vinden geen andere mutaties plaats. Het kapitaal aan het einde van het $n$-de jaar, aangeduid met $K_n$, voldoet aan de volgende recurrente betrekking:

$$K_{n+1} = (1+r)\cdot K_n$$

Het beginkapitaal $K_0$ is na $n$ jaar opgelopen tot:

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n \qquad (1)$$

Dit is de bekende formule voor samengestelde interest. De waarde $K$ heet de *contante waarde* en de waarde $K_n$ heet de *eindwaarde* van de lening.

Als iemand een banksaldo heeft en in jaar $n$ vindt een positieve of negatieve betaling richting bank plaats ter grootte $A_n$, dan hebben we de volgende recurrente betrekking:

$$K_{n+1} = K_n + r\cdot K_n + A_n \qquad (2)$$

Deze recurrente betrekking of differentievergelijking kan diverse situaties beschrijven:

- Sparen: $K_n > 0$ en $r\cdot K_n + A_n > 0$
- Lenen: $K_n < 0$; de waarde $r\cdot K_n + A_n$ is (mits $> 0$) de aflossing in jaar $n$.
- Rentenieren: $K_n > 0$ en $A_n < 0$; er wordt ingeteerd ter grootte van een bedrag $r\cdot K_n + A_n$.

Analoog aan een differentiaalvergelijking lossen we een differentievergelijking op door eerst de gereduceerde vergelijking, in dit geval $K_{n+1} = K_n + r\cdot K_n$, op te lossen. Dit levert $K_n = C\cdot(1+r)^n$ met $C$ een nader te bepalen constante.

De algemene oplossing van (2) vinden we door bij de oplossing van de gereduceerde vergelijking een particuliere oplossing op te tellen. Een particuliere oplossing is

$$K_n = K_0\cdot(1+r)^n + \sum_{i=0}^{n-1} A_1\cdot(1+r)^{n-1-i}.$$

We kunnen nu de algemene oplossing opschrijven. Bij substitutie van $n = 0$ in $K_n = C\cdot(1+r)^n$ blijkt dat $C = K_0$. De algemene oplossing wordt derhalve gegeven door:

$$K_n = K_0\cdot(1+r)^n + \sum_{i=0}^{i=n-1} A_i\cdot(1+r)^{n-1-i} \qquad (3)$$

De waarde $K_n$ is dus gelijk aan de eindwaarde van het

beginkapitaal $K_0$ plus de som van de eindwaarden van de betalingen $A_n$. We kunnen de betalingen $A_n$ derhalve ook als nieuwe spaarsaldi of leningen zien.
De lezer wordt uitgenodigd na te gaan in (3) dat, indien $A_n = -r \cdot K_0$, het saldo $K_n$ constant op $K_0$ staat.
Bij een zogeheten *spaarhypotheek* wordt om belastingtechnische redenen de schuld kunstmatig hoog gehouden. Een deel van de periodieke betalingen wordt dan tegen dezelfde rente op een afzonderlijke spaarrekening gezet. De debiteur heeft netto een saldo dat voldoet aan (2) en dus ook aan (3). De financiële consequenties zijn voor de klant dus dezelfde als bij een 'gewone' aflossing.
De oplossing (3) verkrijgt men ook wanneer men, uitgaande van $K_0$, de vormen voor $K_1$, $K_2$, $K_3$,... bepaalt en vervolgens tot formule (3) besluit.
Voor het geval $A_n$ een constante waarde $A$ heeft, is nog een andere oplossing mogelijk. Een particuliere oplossing van (2) wordt dan verkregen door voor $K_n$ een geschikte constante te kiezen. Eenvoudig is in te zien dat deze constante oplossing gegeven wordt door $K_n = \frac{A}{r}$.
De algemene oplossing van (2) is weer de som van deze particuliere oplossing en $K_n = C \cdot (1+r)^n$, de oplossing van de gereduceerde vergelijking. Substitutie van $n = 0$ levert

$C = K_0 + \frac{A}{r}$. Hieruit volgt:

$$K_n = (K_0 + \frac{A}{r}) \cdot (1+r)^n - \frac{A}{r} = K_0 \cdot (1+r)^n + A\frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (4)$$

Met gebruikmaking van de formules voor een meetkundige rij is na te gaan dat deze vorm gelijkwaardig is aan (3).

## Een andere oplossingsmethode

Voor het zojuist beschouwde geval dat $A_n$ een constante waarde $A$ heeft, gebruikt de economische literatuur andere methoden, die we in deze paragraaf zullen behandelen.
We definiëren $\Delta_n = K_n - K_{n-1}$; dan geldt:

$$K_n - K_0 = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta_i \quad (5)$$

De grootheid $\Delta_n$ is gelijk aan $r \cdot K_{n-1} + A$ en is, in geval van een lening, gelijk aan de aflossing in het jaar $n-1$.
Vanwege het feit dat $A$ constant is, kunnen we afleiden:

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = r \cdot \Delta_{n-1} \quad (6)$$

We nemen nu de grootheid $\Delta_1 = r \cdot K_0 + A_1$ als uitgangspunt. Als gevolg van (6) hebben we $\Delta_n = \Delta_1 \cdot (1+r)^{n-1}$, en (5) gaat nu over in:

$$K_n - K_0 = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta_i \cdot (1+r)^{i-1} =$$

$$r \cdot K_0 \cdot \sum_{i=0}^{i=n-1} (1+r)^i + A \cdot \sum_{i=0}^{i=n-1} (1+r)^i \quad (7)$$

Met gebruikmaking van de somformule van de meetkundige rij krijgen we:

$$K_n - K_0 = K_0 \cdot ((1+r)^n - 1) + A \cdot \sum_{i=0}^{i=n-1} (1+r)^i \quad (8)$$

Dit resultaat is in overeenstemming met (3).
De zojuist behandelde methode wordt in de literatuur vaak gebruikt om de formules voor annuïteiten af te leiden. *(Een annuïteit is een vaste jaarlijkse som, bestaande uit rente plus aflossing, die betaald wordt om een schuld af te doen, waarbij de rente jaarlijks minder wordt en de aflossing groter. Red.)* Men stelt dan in (8) $K_{n_0} = 0$ met $n_0$ de looptijd. Voor de afleiding van een annuïteit bestaat echter nog een andere methode die eenvoudiger en eleganter is, maar minder vaak wordt aangetroffen in de literatuur. In plaats van $\Delta_1$ nemen we $\Delta_{n_0}$ als uitgangspunt. Zoals gezegd geldt $K_{n_0} = 0$ en dit levert $\Delta_{n_0} = -K_{n_0-1}$. In combinatie met $\Delta_{n_0} = r \cdot K_{n_0-1} + A$ leiden we af:

$$\Delta_{n_0} = \frac{A}{1+r} \quad (9)$$

Hieruit volgt met gebruikmaking van (6):

$$\Delta_n = \frac{A}{(1+r)^{n_0+1-n}} \quad (10)$$

waarna (5) ons zegt:

$$K_{n_0} - K_0 = -K_0 = \sum_{i=1}^{i=n_0} \frac{A}{(1+r)^{n_0+1-i}} = \sum_{i=1}^{i=n_0} \frac{A}{(1+r)^i} \quad (11)$$

Deze vorm is gelijkwaardig aan (4) en (8) met $K_n = 0$ voor $n = n_0$.

## Relatie met Levensverzekeringswiskunde

Een vak dat sterk verwant is aan de financiële rekenkunde is de Levensverzekeringswiskunde. Een essentieel hulpmiddel bij dit vak zijn de zogeheten overlevingstafels (vroeger aangeduid met de term sterftetafels), die elk jaar door het CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek) worden gepubliceerd. Deze bestaan uit een lijst van waarden $l_j$ die zodanig zijn gekozen, dat $\frac{l_j}{l_{j-1}}$ precies gelijk is aan de kans dat een Nederlander overlijdt in zijn $j$-de levensjaar. In het algemeen is $\frac{l_p}{l_q}$, $p > q$, de kans dat iemand van $q$ jaar de leeftijd $p$ haalt. Voor de waarde van $l_0$ is steeds 10.000.000 gekozen.
De recurrente betrekking (2) is hier in gewijzigde vorm van toepassing:

$$K_{n+1} = \frac{l_n}{l_{n+1}} (K_n + r \cdot K_n + A_n) \quad (12)$$

waarbij $A_n$ de premie/koopsom of de uitkering in het $n$-de levensjaar is. Het principe achter elke polis is: de bedragen $A_n$ worden zodanig gekozen dat $K_0 = 0$ en $K_{108} = 0$ met $K_0$ en $K_{108}$ het tegoed bij een verzekerings-maatschappij op leeftijd 0 resp. 108 (de sterftetabellen gaan tot de leeftijd van 108 jaar). We veronderstellen hier wel dat, indien iemand voortijdig overlijdt, de tot dan toe betaalde inleg bij de maatschappij blijft. Men kan bijvoorbeeld een polis hebben met $A_{50} > 0$ (een koopsom op 50-jarige leeftijd, een relatief groot

bedrag), en $A_n < 0$ (de uitkering, een relatief klein bedrag) voor $n \geq 65$ en $A_n = 0$ voor andere $n$-waarden. Het omgekeerde kan ook: vóór de leeftijd van 65 betaalt men premies om op 65-jarige leeftijd een grote kapitaaluitkering te ontvangen. Een combinatie komt in de praktijk het meeste voor.
Meer informatie over dit onderwerp kan men vinden in [2].

## Effectieve rente

In offertes voor geldleningen ziet men wel vermeld: rentepercentage 5,2% maandelijks te voldoen, effectief rentepercentage 5,4%. Dit houdt in, dat de klant maandelijks $K \cdot 0{,}052/12$ moet betalen, met $K$ de op dat ogenblik geldende schuld. Het effectieve rentepercentage is gedefinieerd als de rente die zou gelden als de debiteur eenmaal per jaar de rente zou voldoen. Hoe de effectieve rente berekend moet worden, is geregeld in het Besluit Kredietvergoedingspercentage van het Ministerie van Financiën.
We zagen al bij de spaarhypotheek dat het niet uitmaakt of de (al dan niet verplichte) maandelijkse betalingen voor aflossing gebruikt worden of tegen dezelfde rentecondities op een spaarrekening gezet worden. De klant heeft na de $n$-de maand een saldo $K_n$ bestaande uit het kapitaal $K_0$ aan het begin van het jaar met daarop aangevuld het spaargedeelte $S_n$ verkregen door de maandelijkse betalingen $A_n$. De recurrente betrekking $K_{n+1} = K_n + r \cdot K_n + A_n$ geldt hier ook weer.
Na 12 maanden hebben we volgens (3):

$$K_{12} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12} + \sum_{i=0}^{i=11} A_i \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{11-i} \qquad (13)$$

Het rechterlid kunnen we schrijven als $K_0 + r' \cdot K_0 + A'$ met $r' = \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12} - 1$ en met $A'$ gelijk aan de genoemde somformule. De effectieve rente is daarom gelijk aan $r'$. We zien tevens dat een maandelijkse annuïteit met rentevoet $r$ en annuïteit $A$ gelijkwaardig is aan een jaarlijkse annuïteit met de bovengenoemde waarden $r'$ en $A'$, aannemende dat de klant een bankrekening met een maandrente van $\frac{r}{12}$ kan openen.

## Continue rente

We hebben bij de bespreking van de effectieve rente al gezien, dat er verschil is tussen een maandelijkse rente van $\frac{r}{12} \cdot K$ of een jaarlijkse rente van $r \cdot K$.
In de praktijk wordt bij spaardeposito's gewerkt met rente per dag. Heeft men gedurende $d$ dagen een tegoed van $K$, dan wordt daarover $\frac{d}{365} \cdot r \cdot K$ aan rente gegeven. Om rente-op-rente te voorkomen wordt de rente pas aan het einde van het jaar uitgekeerd dan wel bijgeschreven. In plaats van rente per jaar, per maand, per dag, per seconde, enz. kan men ook continue rente beschouwen. De wiskundige afleiding van continue rente is dezelfde als die voor de groeiprocessen zoals men die in schoolboeken aantreft ter introductie van exponentiële functies. Laten we de 'rente per jaar' stellen op $\delta$ (dit symbool wordt in de economische literatuur veel gebruikt in deze context; zie [4] en [5]). Als het jaar in $n$ gelijke perioden wordt verdeeld en als na elk van deze periodes rente wordt bijgeschreven, dan groeit het beginbedrag $K_0$ in $d$ perioden ofwel in $t = \frac{d}{n}$ jaar tot:

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{\delta}{n}\right)^d = K_0 \cdot \left(1 + \frac{\delta}{n}\right)^{n \cdot t} \qquad (14)$$

Voor $n \to \infty$ gaat deze waarde naar $K_0 \cdot e^{\delta \cdot t}$. Deze vorm is ook te schrijven als $K_0 \cdot c^t$. Het komt er dus op neer, dat een kapitaal dat $t$ jaar uitstaat (met $t$ een willekeurig reëel getal), vermenigvuldigd wordt met een factor $c^t$. Het maakt nu niet meer uit wanneer de groei precies wordt bijgeschreven. Of men na elk half jaar met $c^{1/2}$ dan wel na elk jaar met $c^1$ vermenigvuldigt, het resultaat is hetzelfde.

De algemene behandeling van continue rente berust op de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{\mathrm{d}K(t)}{\mathrm{d}t} = \delta \cdot K(t) + A(t) \qquad (15)$$

De oplossing ingeval $A$ constant is, is:

$$K(t) = K(0) \cdot e^{\delta \cdot t} + \frac{A}{\delta} e^{\delta \cdot t} - \frac{A}{\delta} \qquad (16)$$

Ingeval van een annuïteit hebben we $K(t_0) = 0$, en derhalve is

$$K(t) = \frac{A}{\delta} e^{\delta \cdot (t - t_0)} - \frac{A}{\delta} \qquad (17)$$

Een van de weinige boeken waarin het begrip continue annuïteit behandeld wordt is [3].

## Een didactische noot

Tot voor kort werden in het vak Economische wetenschappen-2 de formules uit de hier behandelde stof ook aan de leerlingen voorgelegd, meestal zonder veel aandacht voor de afleiding. Bovendien waren tot voor kort (of nog steeds?) tabellen in gebruik. In het moderne IT-tijdperk is dit wel een erg verouderde vorm van informatieverwerking. In de Tweede fase is Management en Organisatie de nieuwe naam van wat voorheen Handelswetenschappen (havo) dan wel Economische wetenschappen-2 (vwo) heette. De analytische kant is nog verder naar de achtergrond geschoven. Sommige schoolboeken presenteren bijvoorbeeld bij de behandeling van annuïteiten alleen schematische overzichten waarin voor elk jaar gedurende de looptijd de schuld, de afgeloste som en de rente en aflossing voor dat jaar aangegeven wordt. Hoe men, met of zonder computer, aan zo'n schema gekomen is, wordt in het midden gelaten: 'De computer geeft dit overzicht.' Formules worden nauwelijks nog bekeken, laat staan afgeleid.
Er is echter een alternatief, dat de leerlingen toch op een analytische manier bezig laat zijn zonder dat ze met ingewikkelde wiskunde worden lastig gevallen. Dit alternatief wordt geboden door het spreadsheetpakket Excel, dat geheel nieuwe mogelijkheden voor de

Bedrijfseconomische vakken in zich draagt. Excel biedt namelijk de mogelijkheid om zonder al te veel specifieke computerkennis – en in het bijzonder zonder programmeerkennis – modellen te implementeren. Dit zullen we hieronder met een voorbeeld toelichten. Het uitgebreide repertoire van financiële functies moet men dan juist negeren. Men kan de leerlingen vragen voor een bepaalde transactie op het gebied van lenen, sparen of levensverzekeringen de volledige rij $K_n$, $A_n$, $r{\cdot}K_n$ te laten verschijnen in de spreadsheet. Hier zijn een aantal variaties op mogelijk. De functie *goalseek* maakt het mogelijk, invoerparameters in te stellen op basis van gewenste eindresultaten. De leerling die dergelijke opdrachten tot een goed einde brengt, toont daarmee zijn inzicht in de stof. Men kan Excel in een bredere context inzetten om de leerlingen te confronteren met modelmatige en abstracte stof. Zie [1] op Internet voor een serie opgaven waarin de studenten gevraagd wordt een model te bouwen bij een praktisch probleem van economisch-administratieve aard.

**‘vanuit wiskundig oogpunt nauwelijks “sound”’**

## Besluit

De kernpunten uit de financiële rekenkunde zijn hier behandeld. Alleen het onderwerp ‘afschrijvingen’ is niet aan bod gekomen. In de economische literatuur worden de hier gepresenteerde onderwerpen behandeld op een wijze die men vanuit wiskundig oogpunt nauwelijks ‘sound’ kan noemen. De terminologie en de notatie schrikken niet-ingewijden ook vaak af. Hopelijk is met dit artikel een overzicht geschreven dat meer is afgestemd op een wiskundig publiek.

De auteur dankt H.G.J. Pijls voor de discussies en bijdragen bij de totstandkoming van dit artikel.

*Literatuur*

*[1] Webpagina: www.few.eur.nl/few/people/pijls/models/exercises.htm*
*[2] D.P.G. van As, J. Klouwen, L.J. van de Leur: Levensverzekeringswiskunde en Pensioencalculaties (Academic Service, 1998).*
*[3] M. van Haaften: Leerboek der Interestrekening (P. Noordhoff, Groningen, 1929)*
*[4] J.C. Hull: Options, Futures and Other Derivatives (Prentice Hall, 2000).*
*[5] Jan Wesseling, Alex van den Bergh: Realistische Interestberekeningen, met toepassingen van Excel (Academic Service, 2000).*

*Over de auteur*

*Wim Pijls (e-mailadres: pijls@few.eur.nl) werkte van 1973 tot 1984 als docent wiskunde en informatica aan de Lerarenopleiding Zuidwest-Nederland te Delft, thans Hogeschool Rotterdam. Hij was daar verbonden aan de secties wiskunde en economie. Sinds 1984 is hij docent informatica aan de Faculteit Economische Wetenschappen van de Erasmus Universiteit Rotterdam.*

Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

# Van de bestuurstafel

[ Marian Kollenveld ]

4. vakken en vakgebieden

Tijdens onze ledenraadplegingen hebben wij de schoolleiders gevraagd naar reacties vanuit de docententeams op hun scholen. Het zal u niet verrassen dat ons heel vaak gemeld werd dat er "boze bèta's" zijn.
Nu heeft ons bestuur besloten zich zeer terughoudend op te stellen in de discussies over afzonderlijke vakken of vakgebieden, maar het valt ons in de bètadiscussie wel op dat er een tamelijk eenzijdig beeld geschetst wordt van de effecten die de gepresenteerde voorstellen hebben: de reductie van het aantal profielvakken krijgt alle aandacht, maar de zeer aanzienlijke verruiming van de verplichte keuze in de vrije ruimte (van één deelvak naar twee volledige vakken) blijft veelal buiten beschouwing. Juist voor de bèta-vakken - waarvan het belang overigens door ons onvoorwaardelijk wordt erkend, zoals blijkt uit onze betrokkenheid bij Axis en Jet-Net - de gelegenheid hebben om bij de herinrichting van de programma's een aantrekkelijk en haalbaar aanbod tot stand te brengen voor veel leerlingen, doet zich een uitgelezen kans voor om de keuze voor bètavakken en –profielen een stimulans te geven.
In dit verband nog een andere opmerking. Het vervallen van wiskunde in het CM profiel van het HAVO wordt positief beoordeeld. Rond de verplichting van wiskunde binnen het profiel CM voor de VWO-leerlingen zijn de opvattingen van onze leden zeer verdeeld. Een belangrijk aantal leden bepleit de mogelijkheid om dit vak met een schoolexamen af te sluiten, al beseft ons bestuur het bezwaar dat daarmee de harmonische structuur van de examinering onder druk wordt gezet. Een oplossing kan wellicht gevonden worden door de introductie van een module elementaire wiskunde voor alle leerlingen in het gemeenschappelijk deel, af te sluiten met een schoolexamen.

*Uit de brief van de VVO aan de minister (17 maart 2003)*

## Examenbesprekingen

Traditiegetrouw organiseert uw NVvW ook dit jaar weer centrale en regionale examenbesprekingen. Deze besprekingen hebben als doel een eenduidige normering van de examens te bevorderen, en daarmee het overleg tussen eerste en tweede corrector te vereenvoudigen.

Op de regionale bijeenkomsten ontmoeten collega's elkaar om het examen te bespreken en van gedachten te wisselen over de wijze van beoordeling van het werk van de kandidaten. Door die gesprekken ontstaat er ook een zekere 'mores', een consensus over wat goed normeren is, die met name voor collega's met minder examenervaring heel instructief kan zijn.

## Wees lief voor uw tweede corrector

Regelmatig zijn er klachten over collega's die, ongetwijfeld te goeder trouw, het examenwerk niet wilden schenden door er zelf iets op te schrijven, noch in een bijlage enige toelichting te geven op de manier waarop hun score tot stand was gekomen, waardoor de tweede corrector het werk van de eerste corrector niet kon controleren, maar eenvoudigweg alles over moest doen. Doet u dat alstublieft niet, de honorering van de tweede correctie is daar echt niet op berekend! U helpt uw collega enorm door transparant en controleerbaar te zijn in uw normering. En daarbij hoort het duidelijk aangeven van de gemaakte fouten.

## Stapel- of sprokkelnorm?

Ook zijn er elk jaar conflicten met collega's over de interpretatie van de deelscores. Daarom nogmaals voor alle duidelijkheid: de deelscores geven aan hoeveel punten er kunnen worden toegekend als een kandidaat het vraagstuk niet tot een goed einde kan brengen, maar ergens blijft steken. Het is een stapelnorm, niet een rijtje punten waaruit naar believen gekozen kan worden. In het algemeen kunnen latere punten dus slechts worden toegekend als de kandidaat het daaraan voorafgaande traject juist heeft afgelegd.

Van de regionale examenbijeenkomsten wordt een verslag gemaakt, voor het examennummer van Euclides, maar het dient ook als informatie voor de bepaling van de normeringsterm.
Het is dus om meerdere redenen van belang dat de regionale examenbesprekingen goed bezocht worden.
Op de dag na een examen is er een centrale bespreking in Utrecht, waar alle regionale gespreksleiders aanwezig zijn. Op deze vergadering worden zo mogelijk centrale afspraken gemaakt over zaken als de beoordeling van veel gemaakte fouten, verfijningen van de normering en alternatieve oplossingsmethoden; dit ter voorbereiding op de regionale bespreking de dag daarna.

Als service voor de leden die de regiobesprekingen niet bij konden wonen wordt na enige tijd een (summier) verslag van de centrale bijeenkomsten op de NVvW-website gezet.

## Tweede fase plannen - vervolg

Eerst hebben we vooral veel lawaai gemaakt en steun gezocht bij bevriende instanties. Die steun is royaal gegeven. Maar daarbij is het gelukkig niet gebleven: op een heel breed front is inmiddels negatief gereageerd op de plannen van de minister om stevig te snijden in de bètavakken. De Onderwijsraad kwam zelfs met een ongevraagd advies waarin men de reducties afwijst. De AOB, aanvankelijk voor, is van mening veranderd en wijst de plannen nu ook af - zie de NVON-website (*www.nvon.nl/tf_2003.htm*) voor een totaaloverzicht.
Maar we zijn er nog niet. Daarom hebben we met de NVON en de initiatiefnemer van de Boze Bètas-site een lobbygroepje gevormd. We bezoeken het departement, de politieke partijen en de schoolleiders. De reacties zijn interessant, er wordt in elk geval naar ons geluisterd, en verder: de VVD en D'66 zijn positief, de PvdA bezint zich op de vraag of ingrijpen nu wel zo verstandig is, het CDA neemt nog geen standpunt in, wat begrijpelijk is gezien hun positie. De enige echte voorstanders van de plannen lijken nog slechts te vinden in de kringen van schoolleiders die blijkens de VVO-reactie wel een heel negatief beeld hebben van het bèta-onderwijs (**zie kader**). Dat zijn overigens niet alle schoolleiders; er is ook een tegenbeweging die ervoor pleit om deze plannen van tafel te halen.
Het kan overigens geen kwaad om eens bij uw eigen directieleden te informeren hoe zij er over denken, ze dan zo nodig te overtuigen en aan te dringen op actie!
Vooralsnog zijn we verder gekomen dan begin januari mogelijk leek, maar de huid moet nog maar niet verkocht worden. De beer loopt nog rond...

[ Frits Göbel ]

## Puzzel 7 - Gezocht: een optimale stopregel

In een Russisch leerboek over elementaire kansrekening wordt een definitie van een dobbelsteen gegeven! Dat gaat ongeveer zo: ‘Een dobbelsteen is een kubus van been of hout; in de zijvlakken zijn door middel van putjes de getallen 1 t/m 6 aangegeven.’ Blijkbaar is het een boek van vóór het plastic tijdperk. Er moet eigenlijk ook bij dat de dobbelsteen zuiver moet zijn, d.w.z. dat de kans op ieder van de zes uitkomsten even groot is.

De opgave van deze keer gaat over het werpen met een dobbelsteen, en we proberen de verwachte score te maximaliseren. De spelregels zijn eenvoudig:
- Je mag zo vaak gooien als je wilt, maar zodra je minder gooit dan de vorige keer, is je score 0.
- Als je stopt aan het eind van een niet-dalende rij worpen, is de score gelijk aan het aantal ogen in de laatste worp.

### *Opgave 1*

Bepaal een optimale strategie, waarbij dus de verwachte score maximaal is, en bepaal ook dat maximum.

Zoals u waarschijnlijk weet, wordt de verwachting gewoonlijk aangeduid met de letter *E*. Weet u ook waarvan *E* de eerste letter is? Inderdaad, van het Engelse expectation. Maar historisch gezien is het de eerste letter van het Franse espérance. (Vergeet niet dat de kansrekening ‘op poten is gezet’ door Franse wiskundigen als Pascal en later Laplace.) De Nederlander Fred Schuh werd waarschijnlijk beïnvloed door die Franse term. In zijn eerder genoemde boek ‘Wonderlijke Problemen’ (uitg. Thieme, 1943) hanteert hij voor de *verwachting* de term *‘wiskundige hoop’*. Het lerarenkorps kan zich gelukkig prijzen dat deze term geen ingang heeft gevonden!

Voor de tweede opgave is het van belang om alleen consistente strategieën te bekijken, d.w.z. strategieën waarbij de beslissing om te stoppen in een bepaalde situatie alleen afhangt van het aantal ogen in de laatste worp. Voor opgave 1 zijn er twee consistente optimale strategieën (die natuurlijk dezelfde verwachting hebben).

### *Opgave 2*

Bepaal voor één van de consistente strategieën van opgave 1 de kansverdeling van de score.

Ik wil hier graag bij vermelden dat dit veel moeilijker lijkt dan het is.

Wie er aardigheid in heeft, mag ook de *n*-zijdige dobbelsteen aanpakken en tevens de limiet voor  bepalen. Het resultaat speciaal voor opgave 1 is heel verrassend.
Veel plezier!

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.
Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen voor goede oplossingen.
De deadline is deze keer 1 juli a.s.

## Oplossing van de Vliegerpuzzel

Vrijwel per kerende post ontving ik twee oplossingen: van Dick Buijs en A. Verheul. Beide oplossingen zijn vollediger dan de mijne en – u kunt het geloven of niet – dat heeft mij met vreugde vervuld.

In figuur 1 ziet u een oplossing voor $n = 5$. Door in die figuur weer vliegers in vijven te verdelen, vinden we verdelingen voor alle $n$ van de vorm $4a + 1$.

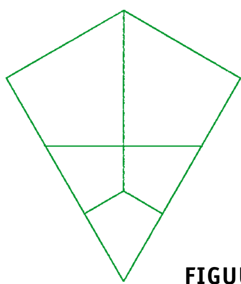
Als je in figuur 1 het onderste vliegertje wegdenkt, blijven er twee gelijke helften over in de vorm van een rechthoekig trapezium. Van deze twee helften kun je een rechthoek leggen en ook een ruit! In figuur 2 maken we met twee van die rechthoeken en twee vliegers een verdeling in 10 stukken ($2 + 2 \times 4$), en dus hebben we nu een verdeling in $n$ stukken voor alle $n$ van de vorm $1 + 4a + 9b$ waarbij $a$ of $b$ gelijk aan 0 mag zijn.

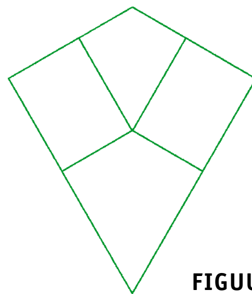
In figuur 3 ziet u een verdeling in 11 stukken, en daarmee komen we tot oplossingen voor alle $n$ van de vorm $1 + 4a + 9b + 10c$.

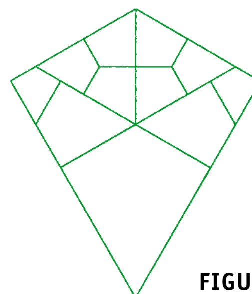
Het is eenvoudig na te gaan dat er geen verdeling mogelijk is voor $n = 2$, 3 of 4, zodat we in dit stadium alleen voor $n = 6$, 7, 8, 12 en 16 geen antwoord hebben.

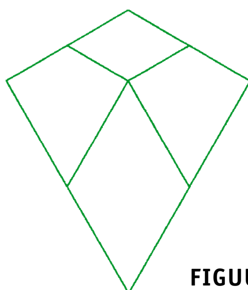
Zo ver was ik gekomen.
Maar Dick Buijs en A. Verheul hebben beiden een oplossing voor $n = 12$ (en dus voor $n = 16$); zie figuur 4. Hier zien we twee vliegers en twee ruiten. Een ruit kan in vier vliegers worden verdeeld (zie boven) en ook in zes vliegers (als in figuur 3), zodat een oplossing in $2 + 4 + 6 = 12$ vliegers ontstaat!

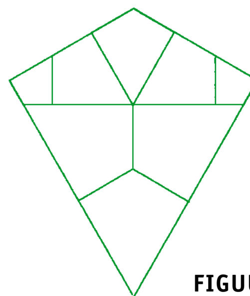
Als klap op de vuurpijl ontving ik zowel van Wobien Doyer als van Lieke de Rooy oplossingen voor alle bovengenoemde waarden van $n$ èn een oplossing voor $n = 8$; zie figuur 5. (De heer Verheul die schreef: ‘De gevallen $n$ {2,3,4,6,7,8} zijn niet te realiseren’, zal zich nu wel even achter zijn oor krabben. Maar een bewijs voor $n = 6$ of $n = 7$ zie ik graag tegemoet).


FIGUUR 1


FIGUUR 2


FIGUUR 3


FIGUUR 4


FIGUUR 5

De ladderstand:
L. de Rooy 97
H. Verdonk 71
T. Afman en W. Doyer 60
D. Buijs 39
L. v.d. Brom 32
P. Meijer 22
S. van Dijk en H. Linders 20
A. Verheul 19
T. Kool 16

# Servicepagina

*Kalender*

In deze kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofd-redacteur. Hieronder treft u de verschijnings-data aan van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld.
Doorgeven kan ook via e-mail:
redactie-euclides@nvvw.nl

| nr | verschijnt | deadline |
|---|---|---|
| 8 | 26 juni 2003 | 13 mei 2003 |

woensdag 1 juni
Studiedag Applets, Utrecht
Organisatie APS

vr. 22 en za. 23 augustus, Amsterdam
vr. 29 en za. 30 augustus, Eindhoven
Vakantiecursus 2003
Organisatie CWI

Examens
di. 20 mei – havo B1/B12
wo. 21 mei – vmbo BB
do. 22 mei – vmbo TGK, vwo B1/B12
vr. 23 mei – havo A12
di. 27 mei – vwo A1/A12

Regionale examenbesprekingen
do. 22 mei – havo B1/B12
ma. 26 mei – vmbo BB (alleen te Utrecht, alleen voor NVvW-leden)
ma. 26 mei – vmbo TGK, vwo B1/B12
di. 27 mei – havo A12
ma. 2 juni – vwo A1/A12
Zie verder pp.300-301 in Euclides 78-6




Voor internet-adressen zie de website van de NVvW: *www.nvvw.nl/Agenda2.html*

Publicaties van de
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* *Zebra-boekjes*
1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (http://www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
*www.nvvw.nl/Publicaties2.html*



# OP WEG NAAR ZELFSTANDIG LEREN MET

# PASCAL

## WISKUNDE

- Pascal geeft zelfstandig leren structuur en houvast
- Werkschrift maakt eigen schrift leerling overbodig
- Werkschrift is leermiddel en naslagwerk tegelijk
- Meerdere leerroutes mogelijk
- Differentiatie duidelijk zichtbaar in informatieboeken en verschillende werkschriften
- Doorlopende leerlijn tweede fase en leerwegen